UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FERRARA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

ASSORBIMENTO CICLOTRONICO ELETTRONICO PER ONDE ELETTROMAGNETICHE IN PLASMI ANCHE FORTEMENTE ANISOTROPI

Relatore:
Chiar.mo Prof. MARINO BORNATICI
Marino Bornatici

Laureando:
GIANLUCA CHIOZZI

Anno Accademico 1986-87

INDICE

INTRODUZIONE

Le ricerche sull'assorbimento e sull'emissione di onde elettromagnetiche da parte di un plasma magnetizzato e sui relativi meccanismi di propagazione rivestono una notevole importanza per lo studio sia dei plasmi di interesse astrofisico sia per quelli di laboratorio.

In particolare nell'ambito degli esperimenti sulla fusione termonucleare controllata sono già state realizzate o sono in via di realizzazione numerose applicazioni pratiche dei risultati ottenuti dalle ricerche teoriche; nello stesso tempo è sorta l'esigenza di approfondire le conoscenze a disposizione.

Di notevole interesse si sono rivelati gli schemi di interazione risonante fra onde elettromagnetiche e plasmi, cioè dell'interazione che ha luogo quando la frequenza dell'onda è prossima alla frequenza caratteristica del plasma o del moto di girazione delle singole particelle attorno alle linee di forza del campo magnetico esterno (risonanza ciclotronica).

In molte situazioni è importante valutare l'interazione fra gli elettroni del plasma e onde elettromagnetiche con frequenza vicina a quella ciclotronica elettronica ω_c o ad una sua armonica

Vediamo alcune delle possibili applicazioni.

1 - Electron Cyclotron Heating (ECH)

Per raggiungere le condizioni di ignizione in un plasma per macchine di tipo Tokamak (che sono quelle sulle quali attualmente si stanno concentrando le ricerche, soprattutto in Europa, per ottenere la fusione termonucleare controllata) sono necessarie temperature dell'ordine dei 10 keV. Tuttavia il semplice riscaldamento ohmico non permette di ottenere tali risultati (recenti misure sulla macchina Joint European Torus (JET) mostrano (Stott, 1986) come la massima temperatura ottenibile per questa via sia di circa 4 keV).

Inoltre l'efficienza di questo metodo diminuisce con l'aumentare della temperatura.

Un metodo di riscaldamento addizionale consiste nell'assorbimento di onde elettromagnetiche alla frequenza di risonanza ciclotronica elettronica (Electro Cyclotron Heating - ECH).

Questo meccanismo è noto da lungo tempo e si ritiene possa fornire uno schema di riscaldamento molto flessibile inquanto le onde ciclotroniche elettroniche risultano ben accoppiate con il plasma e l'assorbimento localizzato.

Ciò permette non solo di riscaldare con elevata efficienza grandi masse di plasma, ma anche di controllarne il profilo di temperatura e di corrente riscaldandone aree selezionate.

Nonostante ciò per la realizzazione pratica dell'ECH è necessario superare grosse difficoltà tecnologiche: infatti il campo magnetico esterno B_0 caratteristico di un Tokamak è dell'ordine di 50 kG a cui corrisponde una frequenza ciclotronica di $f_c = 2.8 \cdot 10^6 B_0 \approx 140$ GHz e solo recentemente si stanno rendendo disponibili sorgenti di potenza nel range di frequenza fra 50 e 150 GHz (sorgenti a microonde tipo gyrotron e free electron lasers) aprendo la strada all'applicazione di queste tecniche.

2 - Electron Cyclotron Current Drive (ECCD)

Per il confinamento di un plasma tipo Tokamak sono indispensabili un campo magnetico toroidale ed uno poloidale.

Il primo può essere facilmente ottenuto per mezzo di bobine esterne al plasma, ma il secondo deve essere prodotto da una corrente toroidale fluente all'interno del plasma stesso.

Il modo attualmente utilizzato per raggiungere questo scopo è generare la corrente inducendo nel plasma un campo elettrico toroidale costante trattando il plasma come il secondario di un trasformatore.

Questo modo di procedere ha tuttavia una grossa limitazione, infatti il campo elettrico può essere sostenuto solamente da un campo magnetico variabile monotonamente, e pertanto solo temporaneamente.

Le macchine funzionanti secondo questo principio possono perciò essere solamente macchine pulsate.

Al contrario vi sono numerose ragioni per auspicare la realizzazione di dispositivi funzionanti in regime stazionario: ad esempio le componenti strutturali di un Tokamak pulsato sono soggette a forti sollecitazioni dovute alle variazioni di temperatura e a quelle del campo magnetico; inoltre la necessità di disporre di intensi campi magnetici impone l'installazione di grosse bobine superconduttrici e si ritiene che le perdite induttive attraverso di esse dovute ai campi magnetici variabili possano aumentare i problemi relativi alla loro refrigerazione.

La realizzazione di macchine a regime stazionario è però subordinata all'individuazione di un metodo per produrre una corrente toroidale continua dell'ordine dei 10 MA.

Un interessante approccio è quello di utilizzare onde elettromagnetiche: è infatti noto sin dagli anni '50 che l'assorbimento di onde elettromagnetiche in un plasma toroidale è in grado di generare una corrente.

In particolare può essere vantaggioso utilizzare onde ciclotroniche elettroniche (Fisch, 1987) inquanto si produce la corrente richiesta senza introdurre nel sistema della quantità di moto.

Consideriamo infatti onde che si propagano obliquamente rispetto al campo magnetico B_0: l'assorbimento di tali onde, che è correlato con la velocità lungo il campo degli elettroni risonanti, può indurre una asimmetria nel trasferimento di momento tra elettroni e ioni che si manifesta con la produzione di una corrente.

Tuttavia tale meccanismo per la generazione di correnti all'interno di un plasma richiede elevate potenze inquanto la sua efficienza viene molto ridotta dalle collisioni elettrone-elettrone che trasferiscono energia da elettroni ad alta energia verso altri a bassa, meglio accoppiati con gli ioni.

3 - Diagnostica

L'emissione di onde elettromagnetiche alla frequenza ciclotronica degli elettroni (ECE) costituisce un utile mezzo diagnostico, in particolare per le macchine a geometria toroidale tipo i Tokamak.

Già da molti anni (le prime misure risalgono al 1958 (Wharton, 1958)) è noto come in linea di principio possano essere determinate per questa via la temperatua locale degli elettroni, la loro densità e la direzione del campo magnetico confrontando gli spettri di emissione in direzione perpendicolare al campo magnetico ottenuti sperimentalmente e per via teorica; inoltre è possibile evidenziare la presenza di elettroni non termici del plasma.

Per quanto concerne le misure di temperatura elettronica, queste possono essere eseguite con successo in plasmi che si comportino come un corpo nero se la radiazione è misurata da una antenna altamente direzionale posta nella zona di bassa intensità del campo magnetico ed orientata perpendicolarmente ad esso (Bornatici et al., 1983).

Tali condizioni si riscontrano in una vasta gamma di situazioni sperimentali e pertanto le misure di temperatura elettronica mediante ECE vengono eseguite abitualmente e costituiscono un fondamentale strumento di diagnostica per i plasmi tipo Tokamak.

Diversa è la situazione per le misure di densità locale degli elettroni; in questo caso infatti non è ancora stato possibile ottenere risultati sperimentali utili.

Il problema è costituito dal fatto che, contrariamente a quanto si verifica per le misure di temperatura, la riflessione della radiazione sulle pareti metalliche della camera a vuoto del plasma gioca un ruolo importante.

Nello stesso tempo per le frequenze caratteristiche dell'ECE il coefficiente di riflessione R del materiale delle pareti, che deve essere ovviamente determinato per ogni singola macchina, è molto alto: dell'ordine del 90%.

Anche per la determinazione locale della direzione del campo magnetico la situazione è la stessa: tali misure si basano infatti sulle forti differenze nelle caratteristiche di emissione dell'onda straordinaria e dell'onda ordinaria (cfr. Cap.2), ma la riflessione sulle pareti provoca un mescolamento di queste informazioni.

Attualmente questi problemi possono essere parzialmente superati solamente mediante misure di attenuazione usando fasci trasmessi fra due antenne altamente direzionali e sintonizzate ad una frequenza di risonanza $n\omega_c$. Questo permette di misurare lo spessore ottico del plasma e, assieme alle misure di emissione, di calcolare temperatura e densità.

Da misure di trasmissione a vari angoli per fasci linearmente polarizzati è anche possibile determinare la direzione locale del campo magnetico.

L'osservazione simultanea della radiazione nelle zone di basso ed alto campo magnetico di un dispositivo toroidale è un metodo semplice e sensibile per ottenere informazioni sulla presenza di code supertermiche nella funzione di distribuzioone degli elettroni.

Infatti l'emissione di radiazione ciclotronica non termica dipende dalla presenza di piccole popolazioni di elettroni altamente energetici e pertanto uò in linea di principio essere utilizzata per ottenere informazioni sulla funzione di distribuzione degli elettroni.

Tuttavia nella maggior parte dei casi questi soli dati sono insufficienti per una determinazione univoca della distribuzione.

4 - Sviluppi tecnologici

Come abbiamo già avuto modo di osservare la realizzazione pratica dell'ECH e dell'ECCD sono subordinate alla realizzazione di sorgenti di potenza per onde elettromagnetiche di frequenza compresa fra 10 e 300 GHz.

Recentemente sono stati compiuti notevoli progressi in questa direzione, principalmente secondo due diversi approcci: lo sviluppo di "gyrotron" e di "free electron lasers" (FEL).

In un gyrotron (Tran, 1987), la sorgente di energia libera è l'energia rotazionale di elettroni relativistici in un campo magnetico assiale B_o. Tali elettroni guidati dal campo magnetico assorbono ed emettono onde elettromagnetiche a frequenze vicine a quella di risonanza ciclotronica.

Per ottenere la produzione di onde elettromagnetiche si fa in modo che gli elettroni che emettono siano in numero maggiore di quelli che assorbono sfruttando le instabilità caratteristiche dei fasci di elettroni: per lo sviluppo di questi dispositivi è pertanto indispensabile una approfondita conoscenza delle caratteristiche di assorbimento ed emissione di elettroni con funzioni di distribuzione altamente anisotropa di tipo "fascio" o "anello".

Recentemente (Orzechowski et al.,1986) è stato dimostrato come un Free Electron Laser pulsato sia un efficiente mezzo per produrre intensi fasci di microonde a frequenze dell'ordine di quelle ciclotroniche.

Un tale dispositivo è pertanto molto promettente sia per ECH che per ECCD.

In particolare al Lawrence Livermore National Laboratory è in corso di realizzazione un importante esperimento per la realizzazione di una corrente quasi stazionaria in un plasma toroidale mediante un FEL pulsato (Nevins, 1987).

5 - Organizzazione della tesi

Il presente lavoro si propone di calcolare l'assorbimento di onde elettronagnetiche alla frequenza di risonanza ciclotronica degli elettroni o alle sue armoniche in un plasma.

In particolare verranno studiati plasmi con funzione di distribuzione fortemente anisotropa del tipo di quelle utilizzate per lo studio dei gyrotron.

Le appendici A e B sono propedeutiche alla lettura degli altri capitoli inquanto contengono le definizioni di "tensore dielettrico" e di "coefficiente di assorbimento" per onde elettromagnetiche in un plasma, assieme ai dettagli dei calcoli che dalle equazioni di Maxwell permettono di ricavare la forma del coefficiente di assorbimento utilizzata nella tesi.

In questo lavoro l'assorbimento, diversamente da quanto viene fatto in genere, è calcolato a partire dall'equazione di bilancio energetico delle onde elettromagnetiche, cioè dal teorema di Poynting.

In questo modo rimane sempre in evidenza la dipendenza dell'assorbimento dalla polarizzazione dell'onda.

Nel capitolo 1 si ricava, per una nuova via, una diversa forma del tensore dielettrico relativistico ottenuta da Weiss (Weiss, 1985) e ulteriormente sviluppata da Tamor (Tamor, 1986).

Questo risultato è interessante inquanto consente di verificare la validità delle espressioni trovate da tali autori e di esprimere alcune valutazioni sull'utilità pratica di questa nuova forma del tensore dielettrico.

Il capitolo 2 invece contiene un ulteriore sviluppo dell'espressione relativa alla potenza dissipata, definita nella Appendice A, e la discussione del significato della condizione di risonanza ciclotronica relativistica.

Inoltre viene calcolato il coefficiente di assorbimento spaziale per una arbitraria funzione di distribuzione per gli auto-modi del plasma, più specificamente: onda ordinaria e straordinaria per propagazione perpendicolare, onde longitudinali (L), polarizzate circolarmente verso destra (RH) e verso sinistra (LH) per propagazione parallela.

Nelle sezioni 3 e 4 il calcolo del coefficiente di assorbimento per queste onde è specializzato alle funzioni di distribuzione rispettivamente di tipo "beam" e "ring" con particolare riguardo al modo ordinario della "ring" che presenta una instabilità.

Dove possibile i risultati ottenuti sono confrontati con quanto presente nella letteratura: in genere si tratta di particolari limiti di risultati qui ottenuti in forma più generale.

Cap. 1

Forma alternativa del tensore dielettrico relativistico

Il tensore dielettrico per onde elettromagnetiche in un plasma viene usualmente espresso (cfr. App. B per i dettagli del calcolo) mediante la (B.18)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\bar{\omega}_p}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p} \, \frac{S_{ij}^{(n)}}{\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega} N_\parallel \bar{p}_\parallel - n} + \left(\frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \right) \delta_{iz}\delta_{jz} \int d^3\bar{p} \, \frac{\bar{p}_\parallel}{\bar{p}_\perp} F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \tag{1.1}$$

dove (B.19)

$$S_{ij}^{(n)} \equiv \begin{vmatrix} \bar{p}_\perp U \left[\frac{n}{a} J_n \right]^2 & -\bar{p}_\perp U \frac{in}{a} J_n J_n' & \bar{p}_\parallel U \frac{n}{a} J_n^2 \\ \bar{p}_\perp U \frac{in}{a} J_n J_n' & \bar{p}_\perp U J_n'^2 & \bar{p}_\parallel U i J_n J_n' \\ \bar{p}_\parallel U \frac{n}{a} J_n^2 & -\bar{p}_\parallel U i J_n J_n' & (\bar{p}_\parallel^2 / \bar{p}_\perp) U J_n^2 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

con $J_n = J_n(a)$ le funzioni di Bessel di ordine n e argomento $a = \bar{\omega} N_\perp \bar{p}_\perp$, mentre U e $F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel)$ sono definite rispettivamente da (B.20) e (B.17).

Risulta tuttavia evidente anche ad una prima analisi come tale espressione sia poco maneggevole per analisi di tipo numerico inquanto richiede il calcolo di sommatorie di infiniti termini contenenti funzioni di Bessel.

Per ovviare a questo problema si è cercata una nuova soluzione dell'equazione di Vlasov che non contenesse la serie di infiniti termini: un risultato in questa direzione è stato ottenuto da Isaac Weiss (Weiss, 1985) e da Stephen Tamor (Tamor, 1986).

Tali risultati sono stati testati numericamente per alcune componenti del tensore dielettrico, tuttavia non è stata eseguita una verifica diretta con la (1.1) che permettesse di ricavare da questa la nuova forma del tensore dielettrico: tale operazione è però molto importante inquanto permette alcune interessanti osservazioni sulla validità e sull'utilità effettiva del risultato ottenuto.

A questo scopo utilizziamo il fatto che (Newberger, 1982) (Evangelidis, 1984)[1] per una serie infinita di funzioni di Bessel del tipo

$$R(p,\mu) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_{m+p}(a)\ J_m(a)}{m-\mu} \tag{1.3}$$

dove $Re(p) \geq -1$, si può scrivere la forma chiusa

$$R(p,\mu) = -\left\{ \pi/\sin(\mu\pi)\right\} J_{p+\mu}(a)\ J_{-\mu}(a) \tag{1.4}$$

Inoltre per $Re(p)<-1$ è sufficiente ricordare che

---

[1]E' necessario osservare in questa sede che l'articolo di E.A.Evangelidis contiene un errore nella formula (17) che si dovrebbe leggere

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} m\ \frac{J_{m+1}(a)\ J_m(a)}{m-\mu} = -\ \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}\ J_{-\mu}(a) J_{\mu+1}(a)$$

Tale errore si riflette anche sulle seguenti (19) e (20).

Si ritiene inoltre opportuno rilevare che la (12) e la (13), seppure ottenute per diversa via, sono analoghe e pertanto possono venire inglobate in un'unica espressione come qui è stato fatto per la (1.4).

$$\nu J_\nu(a) = (a/2)\left\{J_{\nu-1}(a) + J_{\nu+1}(a)\right\} \tag{1.5}$$

e pertanto le funzioni di Bessel di ordine $\nu-1$ possono essere espresse in funzione di quelle di ordine ν e $\nu+1$.

Questo risultato può essere esteso al caso più generale di espressioni del tipo

$$R(p,l,\mu) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_{m+p}(a)J_{m+l}(a)}{m-\mu} \tag{1.6}$$

con l intero, infatti posto $n = m+l$ si ha

$$R(p,l,\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_{n+(p-l)}(a)\; J_n(a)}{n-(\mu+l)}$$

e quindi

$$\text{per } Re(p-l)\geq -1 \qquad R(p,l,\mu) = -\frac{\pi}{\sin((\mu+l)\pi)}\, J_{p+\mu}(a)\; J_{-(\mu+l)}(a) \tag{1.7}$$

mentre per $Re(p-l)<-1$ si procede in modo analogo al caso precedente.

1.1 - Derivazione diretta della nuova forma del tensore dielettrico

Determiniamo la nuova forma degli elementi del tensore dielettrico.

A questo scopo osserviamo che gli sviluppi delle componenti della (1.2) secondo la (1.7) sono legati fra di loro e pertanto è conveniente scegliere un ordine opportuno.

Posto

$$T_{ij} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{ij}^{(n)}}{n-\mu} \tag{1.8}$$

dove

$$\mu \equiv \bar{\omega}\,\gamma - \bar{\omega}\, N_{\parallel}\, \bar{p}_{\parallel} \tag{1.9}$$

sostituendo la (1.7) si ha

$$T_{33} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U \frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp} \frac{J_n J_n}{n-\mu} = -U \frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp} \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} J_\mu(a)\, J_{-\mu}(a)$$

e analogamente, ricordando che

$$J'_n(a) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(a) - J_{n+1}(a)\right) \qquad (1.10)$$

e sottintendendo l'argomento delle funzioni di Bessel, si ha

$$T_{23} = \sum i \frac{\bar{p}_\parallel}{2} U \frac{(J_{n-1}-J_{n+1})J_n}{n-\mu} = -i \frac{\bar{p}_\parallel}{2} U \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \left[J_{\mu-1}-J_{\mu+1}\right]$$

$$T_{13} = \bar{p}_\parallel U \sum \frac{1}{2} \frac{\left[J_{n-1}+J_{n+1}\right]}{n-\mu} J_n = -\bar{p}_\parallel \frac{U}{2} \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \left[J_{1+\mu}+J_{\mu-1}\right] J_{-\mu}$$

$$= -\frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \frac{\bar{p}_\parallel U}{a} \mu J_\mu J_{-\mu}$$

Per il termine T_{12} si procede in maniera leggermente diversa, infatti

$$T_{12} = -i\bar{p}_\perp \frac{U}{a} \sum n\, J_n J'_n = -i\bar{p}_\perp U \sum \frac{n}{a} \frac{d}{da} \left[\frac{1}{2} \frac{J_n^2}{n-\mu}\right]$$

$$= -i\bar{p}_\perp U \frac{1}{2a} \frac{d}{da} \sum \frac{a}{2} \frac{\left[J_{n+1}+J_{n-1}\right]}{n-\mu} J_n$$

$$= +i\bar{p}_\perp U \frac{1}{4a} \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \frac{d}{da} \left[J_{1+\mu}J_{-\mu} + J_{-\mu}J_{\mu-1}\right]$$

$$= i\frac{1}{4}\bar{p}_\perp U \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \frac{d}{da} \left[2\mu J_{-\mu}J_\mu\right]$$

$$= i\bar{p}_\perp U \frac{1}{2a} \frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)} \left[J_\mu J'_{-\mu} + J_{-\mu}J'_\mu\right]$$

sviluppando ora le quattro funzioni di Bessel mediante la (1.10) e la (1.5) si ottiene

$$T_{12} = -i\bar{p}_\perp U \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} \left[J_{\mu-1}J_{1-\mu} - J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)}\right]$$

Per l'elemento T_{22} ,

$$T_{22} = \frac{1}{4} \bar{p}_\perp U \sum \frac{J_{n-1}^2 + J_{n+1}^2 - 2J_{n-1}J_{n+1}}{n-\mu}$$

ma per i singoli termini che costituiscono T_{22} si ha, applicando la (1.7),

$$\sum \frac{J_{n-1}J_{n-1}}{n-\mu} = \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} J_{\mu-1}J_{1-\mu}$$

$$\sum \frac{J_{n+1}J_{n-1}}{n-\mu} = \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)}$$

$$\sum \frac{J_{n+1}J_{n-1}}{n-\mu} = \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)} J_{\mu+1}J_{1-\mu}$$

e quindi

$$T_{22} = \frac{1}{4}\,\overline{p}_\perp U \frac{\pi}{\sin(\mu\pi)}\left[J_{\mu-1}J_{1-\mu} + J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)} - 2J_{\mu+1}J_{1-\mu}\right]$$

Infine

$$T_{11} = \frac{\overline{p}_\perp U}{a^2}\sum n^2 \frac{J_n J_n}{n-\mu} = \overline{p}_\perp \frac{U}{4}\sum \frac{J^2_{n+1} + J^2_{n-1} + 2J_{n+1}J_{n-1}}{n-\mu}$$

$$= \overline{p}_\perp \frac{U}{4}\frac{\pi}{\sin(\mu\pi)}\left[J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)} + J_{\mu-1}J_{1-\mu} + 2J_{\mu+1}J_{1-\mu}\right]$$

$$= \overline{p}_\perp \frac{U}{4}\frac{\pi}{\sin(\mu\pi)}\left[\left[-\frac{2}{a}\,\mu J_{-\mu} - J_{-\mu+1}\right]J_{\mu+1} + \left[\frac{2}{a}\,\mu J_{\mu} - J_{\mu+1}\right]J_{1-\mu} + 2J_{\mu+1}J_{1-\mu}\right]$$

$$= -\overline{p}_\perp \frac{U}{2a}\frac{\mu\pi}{\sin(\mu\pi)}\left[J_{-\mu}J_{\mu+1} - J_{\mu}J_{1-\mu}\right]$$

In conclusione, quindi, in coordinate cartesiane la nuova forma del tensore dielettrico è

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\overline{\omega}^2_p}{\overline{\omega}}\int d^3\overline{p}\; T_{ij} + \left(\frac{\overline{\omega}^2_p}{\overline{\omega}}\right)\delta_{iz}\delta_{jz}\int d^3\overline{p}\;\frac{\overline{p}_\parallel}{\overline{p}_\perp}F(\overline{p}_\perp,\overline{p}_\parallel) \qquad (1.11)$$

dove

$$T_{ij} = \frac{U\pi}{\sin(\mu\pi)}\begin{pmatrix} -\frac{\overline{p}_\perp}{2a}\mu\left[J_{-\mu}J_{\mu+1} - J_{\mu}J_{1-\mu}\right] & -i\frac{\overline{p}_\perp}{4}\left[J_{\mu-1}J_{1-\mu} - J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)}\right] & -\frac{\overline{p}}{a}\mu J_{\mu}J_{-\mu} \\ i\frac{\overline{p}_\perp}{4}\left[J_{\mu-1}J_{1-\mu} - J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)}\right] & \frac{\overline{p}_\perp}{4}\left[J_{\mu-1}J_{1-\mu} + J_{\mu+1}J_{-(\mu+1)} - 2J_{\mu+1}J_{1-\mu}\right] & -i\frac{\overline{p}_\parallel}{2}J_{-\mu}\left[J_{\mu-1} - J_{1+\mu}\right] \\ -\frac{\overline{p}_\parallel}{a}\,\mu J_{\mu}J_{-\mu} & i\frac{\overline{p}_\parallel}{2}J_{-\mu}\left[J_{\mu-1} - J_{1+\mu}\right] & -\frac{\overline{p}^2_\parallel}{\overline{p}_\perp}J_{\mu}J_{-\mu} \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

E' evidente la maggior compattezza di questa formula rispetto alla (1.1); con la (1.12) la (1.11) si riduce ad un "semplice integrale" di prodotti di due funzioni di Bessel che non contiene più la somma sulle armoniche.

Bisogna però osservare che la rimozione della somma sui numeri armonici è soltanto apparente inquanto gli ordini delle funzioni di Bessel dipendono dal momento, che è la variabile di integrazione, attraverso la (1.9).

Inoltre, in ultima analisi, la somma sulle armoniche riappare in conseguenza del fatto che gli integrandi sono caratterizzati da un numero infinito di singolarità in corrispondenza ai valori interi di μ.

Nonostante però il calcolo reale del tensore dielettrico richieda anche in questo caso la risoluzione di un integrale e di una serie di infiniti termini, l'uso di (1.11) e (1.12)dà un reale vantaggio computazionale alle alte temperature (Tamor, 1986).

1.2 - Il tensore dielettrico nel sistema di riferimento in cui il campo elettrico è polarizzato circolarmente

Una forma ancora più compatta per la (1.12) la si può ottenere nel sistema di riferimento rispetto al quale il campo elettrico è polarizzato circolarmente, cioè nel sistema di coordinate per il quale

$$E_1 = \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}} \qquad E_2 = \frac{E_x - iE_y}{\sqrt{2}} \qquad E_3 = E_z \tag{1.13}$$

Nel nuovo sistema di coordinate il tensore $\underline{\underline{T}}$ assume la forma

$$\underline{\underline{T}}' = M \, \underline{\underline{T}} \, M^{-1}$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

è la matrice di trasformazione e M^{-1} la sua inversa.

Sviluppando il prodotto fra matrici si ottiene dopo alcuni semplici passaggi algebrici

$$T'_{ij} = \frac{U\pi}{\sin(\mu\pi)} \begin{bmatrix} \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{-(\mu+1)} & \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{1-\mu} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu+1} \\ \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{1-\mu} & \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu-1} J_{1-\mu} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu-1} \\ -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu+1} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu-1} & -\frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp} J_\mu J_{-\mu} \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

che, diversamente da (1.12), è un tensore simmetrico e quindi è più facile da trattare.

Tale espressione non è però direttamente comfrontabile con la (53) del lavoro di Tamor già citato, in cui si utilizza la rappresentazione di Fourier (A.6) con $i \to -i$ (cfr. nota a pag.3 dell'appendice A).

Con tale trasformata di Fourier , utilizzata anche da molti altri autori, invece di T espresso nella forma (1.12) si ottiene il suo complesso coniugato T^*.

Il metodo più immediato per eseguire il confronto consiste pertanto nell'applicare la trasformazione di coordinate (1.14) a T^*, cioè il tensore (1.12) ove $i \to -i$: così facendo si ottiene

$$(T^*)' = \frac{\pi U}{\sin(\mu\pi)} \begin{vmatrix} \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu-1} J_{1-\mu} & \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{1-\mu} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu-1} \\ \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{1-\mu} & \frac{\bar{p}_\perp}{2} J_{\mu+1} J_{-(\mu+1)} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{1+\mu} \\ -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu-1} & -\frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{1+\mu} & -\frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp} J_\mu J_{-\mu} \end{vmatrix} \qquad (1.16)$$

Questa espressione corrisponde alla (53) del lavoro di Tamor ad eccezione dei termini simmetrici $(T^*)'_{13}$ e $(T^*)'_{31}$.

Poichè vale la proprietà delle funzioni di Bessel per cui (Abramovitz and Stegun, 1972)

$$J_\mu J_{-\mu+1} = \frac{2\sin(\mu\pi)}{\pi a} - J_{-\mu} J_{\mu-1}$$

si può scrivere

$$(T^*)'_{13} = -\frac{U\pi}{\sin(\mu\pi)} \frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_{-\mu} J_{\mu-1} = \frac{U\pi}{\sin(\mu\pi)} \frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{2}} J_\mu J_{1-\mu} - \sqrt{2}\frac{U}{a}\bar{p}_\parallel \qquad (1.17)$$

Nel corrispondente risultato ottenuto da Tamor non compare l'ultimo termine del membro di destra della (1.17)

1.3 - La parte antihermitiana del tensore dielettrico nella nuova forma

Di particolare importanza è la parte antihermitiana del tensore diel$\overset{1}{\text{e}}$ttrico espressa dalla (B.24b)

$$\varepsilon_{a,ij} = -\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p}\; S_{ij}^{(n)}\; \delta(\bar{\omega}\,\gamma - \bar{\omega}\, N_\parallel \bar{p}_\parallel - n) \qquad (1.18)$$

poichè è questa che contribuisce al coefficiente di assorbimento spaziale (cfr.

App. B per le considerazioni su parte hermitiana ed antihermitiana).

Per esprimere la parte ahtihermitiana del tensore dielettrico secondo la nuova forma (1.11) (1.12), osserviamo prima di tutto che, mentre per la (1.18) si ha a che fare con un polo del tipo $1/(x-x_0)$, ora si hanno infiniti poli del tipo $1/\sin(\mu\pi)$ in corrispondenza con i valori interi di μ.

In questo caso la formula di Plemelj che permette di separare parte principale e residuo dell'integrale è leggermente diversa (Levinson and Redhffer, 1970) e si ha, se dividiamo il range di integrazione in intervalli simmetrici centrati sugli interi

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{f(n)}{\sin(\pi x)}\, dx = P\int \frac{f(n)}{\sin(\pi x)}\, dx - i\delta(x-n)(-1)^n$$

pertanto nel nostro caso dalla (1.11) segue che

$$\epsilon_{a,ij} = \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int d^3\bar{p} \left[T_{ij}\sin(\mu\pi)\right] \delta(\mu-n) \qquad (1.19)$$

A questo proposito osserviamo prima di tutto che il termine mancante nell'espressione trovata da Tamor, (cfr. (1.17)) non ha alcuna influenza sulla parte antihermitiana del tensore dielettrico, inquanto non dipende da $1/\sin(\pi\mu)$ e quindi dai poli dell'integrale da calcolare.

Nella (1.19) ricompare quindi esplicitamente la serie infinita presente nella (1.18) poichè vi sono infiniti punti in cui si annulla l'argonento della delta di Dirac: cioè per cui

$$\sin(\mu\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \equiv \bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}\, N_\parallel \bar{p}_\parallel = n \qquad \text{con n intero}$$

Consideriamo l'elemento T_{11} di (1.12)

Per μ intero uguale a n si ha

$$T_{11}\sin(\mu\pi) = -\pi U \frac{\bar{p}_\perp}{2a}\, n \left[J_{-n}J_{n+1}-J_nJ_{1-n}\right]$$

ma per n intero $J_{-n}= (-1)^n J_n$ e pertanto

$$T_{11}\sin(\pi\mu)= -\pi U \frac{\bar{p}_\perp}{2a}\, nJ_n\left[(-1)^n J_{n+1}-(-1)^{n-1}J_{n-1}\right] = -(-1)^n \pi U\, \bar{p}_\perp\left[\frac{n}{a}\, J_n\right]^2$$

quindi

$$\epsilon_{a,11} = -\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p}\ \bar{p}_\perp U\left[\frac{n}{a}\, J_n\right]^2 \delta(\bar{\omega}\,\gamma - \bar{\omega}\, N_\parallel\, \bar{p}_\parallel - n)$$

che è esattamente la stessa espressione trovata dalla forma standard (1.18) del tensore dielettrico.

Analogo risultato si trova per tutti gli altri elementi del tensore dielettrico.

In conclusione quindi l'uso tensore dielettrico nella forma (1.11), (1.12) può essere vantaggioso nelle applicazioni numeriche in cui si richiede sia la parte hermitiana che antihermitiana.

D'altro canto la corrispondente parte antihermitiana è la stessa calcolata in Appendice B a partire dalla forma standard del tensore dielettrico

Cap. 2

Il coefficiente di assorbimento spaziale per onde in un plasma

In Appendice A si è mostrato che il coefficiente di assorbimento (o amplificazione) spaziale (A.24)

$$\alpha \equiv 2\underline{k}'' \cdot \hat{\underline{S}}$$

(dove $\underline{k} \equiv \underline{k}' + i\underline{k}''$ è il vettore d'onda e $\omega \equiv \omega' + i\omega'' \simeq \omega'$ la frequenza) si può esprimere, mediante il teorema di Poynting, come il rapporto fra la potenza dissipata $\frac{\omega}{4\pi}\underline{E}^{*} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E}$ e il modulo del flusso dell'energia elettromagnetica $\underline{S}(\underline{k}', \omega')$, cioè (cfr. A.24')

$$\alpha = \frac{\omega'}{4\pi} \frac{\underline{E}^{*} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E}}{|\underline{S}(\underline{k}', \omega')|}$$

dove $\underline{\underline{\varepsilon}}_a \equiv \underline{\underline{\varepsilon}}_a(\underline{k}', \omega')$ è la parte antihermitiana del tensore dielettrico relativistico calcolato nella Appendice B.

2.1 - Calcolo della potenza dissipata $\frac{\omega}{4\pi} \underline{E}^{*} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E}$

Dalle (B.24) segue che

$$\varepsilon_{a,ij} = -\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p}\; S_{ij}^{(n)} \delta\left[\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\right]$$

$$= -\pi \left(\frac{\bar{\omega}_p}{\bar{\omega}}\right)^2 \sum \int d^3\bar{p}\; S_{ij}^{(n)}\; \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - \frac{n}{\bar{\omega}}) \qquad (2.1)$$

Si ha pertanto

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = -\pi \left[\frac{\bar{\omega}_p}{\bar{\omega}}\right]^2 \sum \int d^3\bar{p}\; \underline{E}^* \cdot \underline{\underline{S}}^{(n)} \underline{E}\; \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - \frac{n}{\bar{\omega}}) \qquad (2.2)$$

Dobbiamo quindi calcolare $\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{E}$ tenendo conto della condizione di risonanza ciclotronica imposta dalla $\delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n/\bar{\omega})$

Posto pertanto

$$\underline{A} = \sqrt{\bar{p}_\perp U} \left[\frac{n}{a} J_n, -iJ_n', \frac{\bar{p}_\parallel}{\bar{p}_\perp} J_n\right] \qquad (2.3)$$

è immediato verificare che la coppia diadica $\underline{A}^* \underline{A}$ vale

$$\underline{A}^* \underline{A} = \underline{\underline{S}} \qquad (2.4)$$

Si può allora formalmente scrivere

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{E} = \underline{E}^* \cdot \underline{A}^* \underline{A} \cdot \underline{E} = |\underline{A} \cdot \underline{E}|^2 \qquad (2.5)$$

dove

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{E} = \sqrt{\bar{p}_\perp U} \left[\frac{n}{a} J_n E_x - iJ_n' E_y + (\bar{p}_\parallel / \bar{p}_\perp) J_n E_z\right] \qquad (2.6)$$

Poichè

$$J_n'(a) = -J_{n+1}(a) + \frac{n}{a} J_n(a)$$

si può scrivere

$$|\underline{A} \cdot \underline{E}|^2 = \bar{p}_\perp U \frac{n^2}{a^2} \left| \left[E_x - iE_y + \frac{a}{n} \frac{\bar{p}_\parallel}{\bar{p}_\perp} E_z\right] J_n + i\frac{a}{n} E_y J_{n+1} \right|^2 \qquad (2.7)$$

Nello stesso tempo dalle (B.17) e (B.20) segue che

$$\bar{p}_\perp U = \bar{p}_\perp\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+\bar{p}_\perp\frac{N_\parallel}{\gamma}\left[\bar{p}_\perp\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}-\bar{p}_\parallel\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\right] = \bar{p}_\perp\left[\left[1-\frac{N_\parallel \bar{p}_\parallel}{\gamma}\right]\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+\frac{N_\parallel \bar{p}_\perp}{\gamma}\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right] \quad (2.8)$$

Poichè deve essere moltiplicata per la $\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n/\bar{\omega})$ si può prendere

$$1-\frac{N_\parallel \bar{p}_\parallel}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{n}{\bar{\omega}}$$

e quindi la (2.8) diventa

$$\bar{p}_\perp U = \frac{\bar{p}_\perp^2}{\gamma}\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n}{\bar{\omega}}\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+N_\parallel\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right] \quad (2.9)$$

e si ha (Bornatici and Ruffina, 1986)

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^3\bar{p}\,\frac{\bar{p}_\perp^2}{\gamma}\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n}{\bar{\omega}}\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right]\left[\frac{n}{a}\right]^2\left|\left[E_x-iE_y+\frac{a}{n}\,\frac{\bar{p}_\parallel}{\bar{p}_\perp}\,E_z\right]J_n+i\frac{a}{n}J_{n+1}E_y\right|^2\cdot$$
$$\cdot\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n/\bar{\omega}) \quad (2.10)$$

oppure, utilizzando le (B.17)

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{1}{N_\perp^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\left[\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\,\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}_\parallel\,E_z\right]J_n+\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\frac{a}{n}J_{n+1}E_y\right|^2\cdot\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n\omega_c/\omega)\right] \quad (2.11)$$

Posto

$$H(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel) = \left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\,\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}_\parallel\,E_z\right]J_n+i\frac{a}{n}J_{n+1}E_y\right|^2$$

la (2.11) diventa

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{1}{N_\perp^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\left[\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\,H(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel)\,\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n\omega_c/\omega)\right] \quad (2.12)$$

Consideriamo l'integrale

$$\int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\, H(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel)\ \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) \qquad (2.13)$$

e introduciamo come variabili di integrazione $\gamma, \bar{p}_\parallel$ e l'angolo azimutale di $\bar{p}$. L'integrazione sull'angolo introduce semplicemente un fattore 2π, mentre per la presenza della funzione δ rimane la sola integrazione su γ con

$$\bar{p}_\parallel = \frac{1}{N_\parallel}\left[\gamma - \frac{n\omega_c}{\omega}\right]$$

Essendo

$$\gamma^2 \equiv 1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2$$

si ha

$$\bar{p}_\perp^2 = \gamma^2-1-\frac{1}{N_\parallel^2}\left[\gamma-\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2 = \frac{1}{N_\parallel^2}\left\{(N_\parallel^2-1)\gamma^2+2\frac{n\omega_c}{\omega}\gamma-\left[N_\parallel^2+\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\right]\right\}$$

da cui, poichè $\bar{p}_\perp^2 \geq 0$, segue che deve essere

$$(N_\parallel^2-1)\gamma^2+2\frac{n\omega_c}{\omega}\gamma-\left[N_\parallel^2+\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\right] \geq 0 \qquad (2.14)$$

Consideriamo esplicitamente il caso $N_\parallel^2<1$. Sotto la condizione che

$$\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2+(N_\parallel^2-1)\left[N_\parallel^2+\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\right]=N_\parallel^2\left\{N_\parallel^2-1+\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\right\} \geq 0 \qquad (2.14')$$

la (2.14) è verificata per

$$\gamma_{min} \leq \gamma \leq \gamma_{max}$$

dove γ_{min} e γ_{max} sono rispettivamnte la minima e la massima radice dell'equazione associata alla (2.14), cioè

$$\begin{cases} \gamma_{min} = \dfrac{1}{1-N_\parallel^2}\left[\dfrac{n\omega_c}{\omega} - |N_\parallel|\sqrt{N_\parallel^2+(n\omega_c/\omega)^2-1}\right] \\[2ex] \gamma_{max} = \dfrac{1}{1-N_\parallel^2}\left[\dfrac{n\omega_c}{\omega} + |N_\parallel|\sqrt{N_\parallel^2+(n\omega_c/\omega)^2-1}\right] \end{cases} \qquad (2.15)$$

Osserviamo che la condizione (2.14') provoca un taglio di frequenza per ogni $N_\parallel$ fissato, cioè ω deve essere necessariamente minore di un valore massimo che è $n\omega_c$ per $N_\parallel=0$.

L'integrale (2.13) assume la forma

$$\int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\, H(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel)\; \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) = \frac{2\pi}{|N_\parallel|}\int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} d\gamma\; H(\bar{p}_\perp(\gamma),\bar{p}_\parallel(\gamma)) \qquad (2.13')$$

Dalle (2.15) segue che è conveniente effettuare il cambiamento di variabile

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{1}{1-N_\parallel^2}\left[\frac{n\omega_c}{\omega} + |N_\parallel| \sqrt{N_\parallel^2 + (n\omega_c/\omega)^2 - 1}\; t\right] \qquad (2.16)$$

in questo modo infatti

$$\gamma_{max} = 1 \text{ e } \gamma_{min} = -1$$

e la (2.13') diventa

$$2\pi\int_{-1}^{1} dt\; \frac{1}{1-N_\parallel^2}\left[N_\parallel^2 + (n\omega_c/\omega) - 1\right]^{1/2} H(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel)$$

$$= \frac{2\pi}{1-N_\parallel^2}\left[N_\parallel^2 + (n\omega_c/\omega)^2 - 1\right]^{1/2} \int_{-1}^{1} dt\; H(\bar{p}_\perp^{res},\bar{p}_\parallel^{res}) \qquad (2.17)$$

dove

$$\bar{p}_\parallel^{res}(t) = \frac{1}{N_\parallel}\left[\gamma(t) - \frac{n\omega_c}{\omega}\right]$$

$$\bar{p}_\perp^{res}(t) = \sqrt{\gamma^2(t) - \left[1 + (\bar{p}_\parallel^{res}(t))^2\right]}$$

In conclusione si può scrivere la potenza dissipata nella forma

$$\frac{\omega}{4\pi}\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = -\frac{\pi}{2}\omega\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \frac{1}{N_\perp^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2 \frac{\left[N_\parallel^2 + (n\omega_c/\omega)^2 - 1\right]^{1/2}}{1-N_\parallel^2}\int_{-1}^{1} dt\; H(\bar{p}_\perp^{res}(t),\bar{p}_\parallel^{res}(t)) \qquad (2.18)$$

2.2 - Risonanza ciclotronica relativistica

La parte anti-hermitiana del tensore dielettrico (2.1) è diversa da zero se

$$\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega = 0 \qquad (2.19)$$

che esprime la condizione di risonanza ciclotronica relativistica (cfr. App B).

Nel limite non relativistico, $\gamma = 1$ e pertanto la (2.19) diventa

$$1 - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega = 0$$

da cui

$$\bar{p}_\parallel = \frac{1 - n\omega_c/\omega}{N_\parallel} \qquad (2.20)$$

che è l'equazione di una retta parallela all'asse $\bar{p}_\perp$. Pertanto $\bar{p}_\perp$ può assumere valori arbitrari e la condizione di risonanza coinvolge solo la componente parallela della quantità di moto fissandone il valore.

Nel caso relativistico invece, la (2.19) dà

$$\gamma^2 \equiv \bar{p}_\parallel^2 + \bar{p}_\perp^2 + 1 = \left[N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega\right]^2 = N_\parallel^2 \bar{p}_\parallel^2 + (n\omega_c/\omega)^2 + 2N_\parallel \bar{p}_\parallel n\omega_c/\omega \qquad (2.20)$$

che può essere scritta nella forma

$$\frac{(\bar{p}_\parallel - p_*)^2}{a^2} + \frac{\bar{p}_\perp^2}{(1-N_\parallel^2)a^2} = 1 \qquad (2.21)$$

dove

$$p_* \equiv N_\parallel \frac{n\omega_c}{\omega}\left[1 - N_\parallel^2\right]^{-1}$$

$$a^2 \equiv \frac{N_\parallel^2 + \left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1}{(1-N_\parallel^2)^2}$$

con $a^2 \geq 0$ per la (2.14')

Nel semipiano $(\bar{p}_{\parallel},\bar{p}_{\perp}>0)$ la (2.20) è l'equazione di una conica (detta <u>curva di risonanza</u>)(TIBER II Report, 1986).

Dallo studio dei parametri fondamentali di questa equazione si deduce che per

$N_{\parallel}^2 < 1$ si ha una semiellisse

$N_{\parallel}^2 = 1$ si ha una parabola

$N_{\parallel}^2 > 1$ si ha una iperbole

Distinguiamo i diversi casi limitandoci a considerare la frequenza di risonanza fondamentale, cioè a prendere n=1.

1) Ellisse: $N_{\parallel}^2 < 1$

Per $N_{\parallel}^2+(\omega_c/\omega)^2-1<0$ non si ha nessuna soluzione reale, il che corrisponde al fatto che non ci possono essere particelle in risonanza con l'onda.

Viceversa per $N_{\parallel}^2+(\omega_c/\omega)^2-1>0$ la (2.20) è l'equazione di una ellisse centrata nel punto

$$(p_0,0) = \left[\frac{N_{\parallel}\omega_c/\omega}{1-N_{\parallel}^2},0\right] \tag{2.23}$$

e avente semiasse maggiore

$$a = \frac{\sqrt{N_{\parallel}^2+(\omega_c/\omega)^2-1}}{1-N_{\parallel}^2} \tag{2.24}$$

Ciò significa che $\bar{p}_{\parallel}$ e $\bar{p}_{\perp}$ possono assumere solo valori compresi rispettivamente negli intervalli

$$-a+p_0 \le \bar{p}_{\parallel} \le a+p_0$$

$$-\sqrt{1-N_{\parallel}^2}\, a \le \bar{p}_{\perp} \le \sqrt{1-N_{\parallel}^2}\, a$$

In particolare se

$$|p_0| < a \Rightarrow (1-N_{\parallel}^2)\left[(\omega_c/\omega)^2-1\right] > 0$$

e pertanto se

$$\omega < \omega_c \tag{2.25}$$

(frequenze "down-shifted") sono risonanti particelle sia con $\bar{p}_\parallel < 0$ che con $\bar{p}_\parallel > 0$ (Fig. 2.1).

Dal punto di vista della generazione di corrente mediante le onde ciclotroniche elettroniche (current drive by electron cyclotron waves (Fisch, 1987)) la presenza di elettroni aventi $\bar{p}_\parallel$ di segno opposto dà luogo a correnti elettriche di verso opposto che si attenuano a vicenda riducendo la corrente complessiva indotta nel plasma.

Viceversa (Fig. 2.2) per

$$\omega > \omega_c \tag{2.26}$$

(frequenze "up-shifted") tutte le particelle risonanti si muovono nello stesso verso lungo la direzione del campo magnetico contribuendo costruttivamente alla "driven-current".

Dalla (2.23) segue che per $N_\parallel > 0$ il centro dell'ellisse è nel semiasse positivo di $\bar{p}_\parallel$ mentre per $N_\parallel < 0$ in quello negativo (Fig. 2.3) e pertanto se $\omega > \omega_c$ le particelle risonanti hanno tutte $\bar{p}_\parallel$ rispettivamente parallelo o anti-parallelo al campo magnetico.

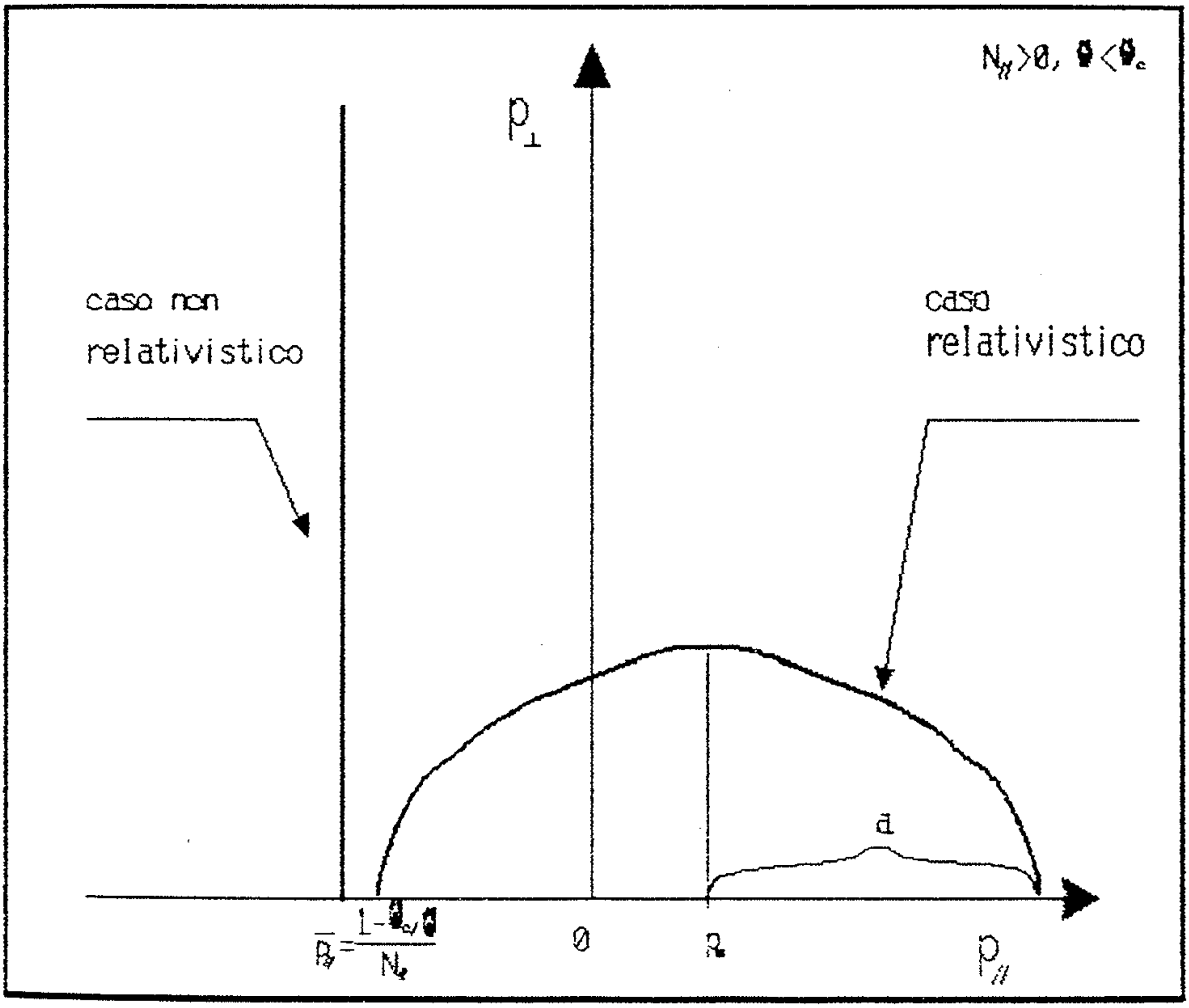
Un caso particolarmente interessante è quello in cui $N_\parallel = 0$ (che corrisponde a propagazione perpendicolare); in questo caso la curva risonante è una circonferenza centrata nell'origine del sistema di riferimento e di raggio

$$a = \sqrt{(\omega_c/\omega)^2 - 1}$$

2) Parabola: $N_\parallel^2 = 1$

Fig. 2.1

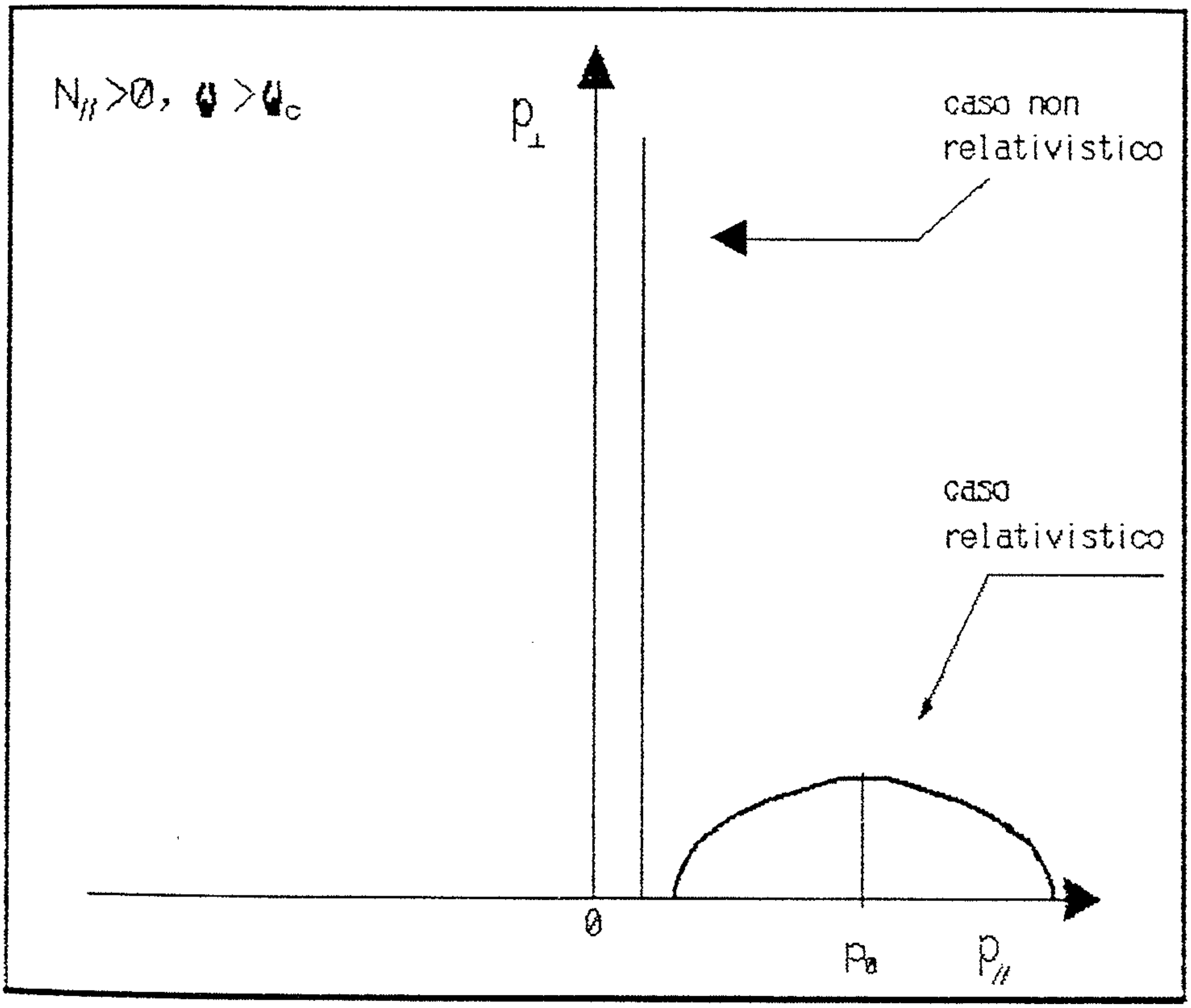
Fig. 2.1



Condizione di risonanza ciclotronica relativistica e non relativistica nello spazio dei momenti per $N_{\parallel}^2<1$ e $|p_{\parallel}|<a$

Fig. 2.2

Fig. 2.2



Condizione di risonanza ciclotronica relativistica e non relativistica nello spazio dei momenti per $N_{//}^2 < 1$ e $|p_0| > a$

La (2.20) assume la forma (Fig. 2.4)

$$\bar{p}_{\perp}^2 = 2(\omega_c/\omega)\bar{p}_{\parallel} + (\omega_c/\omega)^2 - 1 \qquad (2.27)$$

Anche in questo caso il verificarsi della condizione $(\omega_c/\omega)^2<1$ corrisponde ad avere elettroni risonanti tutti con $\bar{p}_{\parallel}$ concorde. Diversamente però dal caso dell'ellisse (in cui $\bar{p}_{\parallel}$ e $\bar{p}_{\perp}$ sono limitati) $\bar{p}_{\perp}$ può assumere qualunque valore e $\bar{p}_{\parallel}$ deve essere maggiore di

$$\frac{\omega}{2\omega_c}\left[1-(\omega_c/\omega)^2\right]$$

3) Iperbole: $N_{\parallel}^2 > 1$

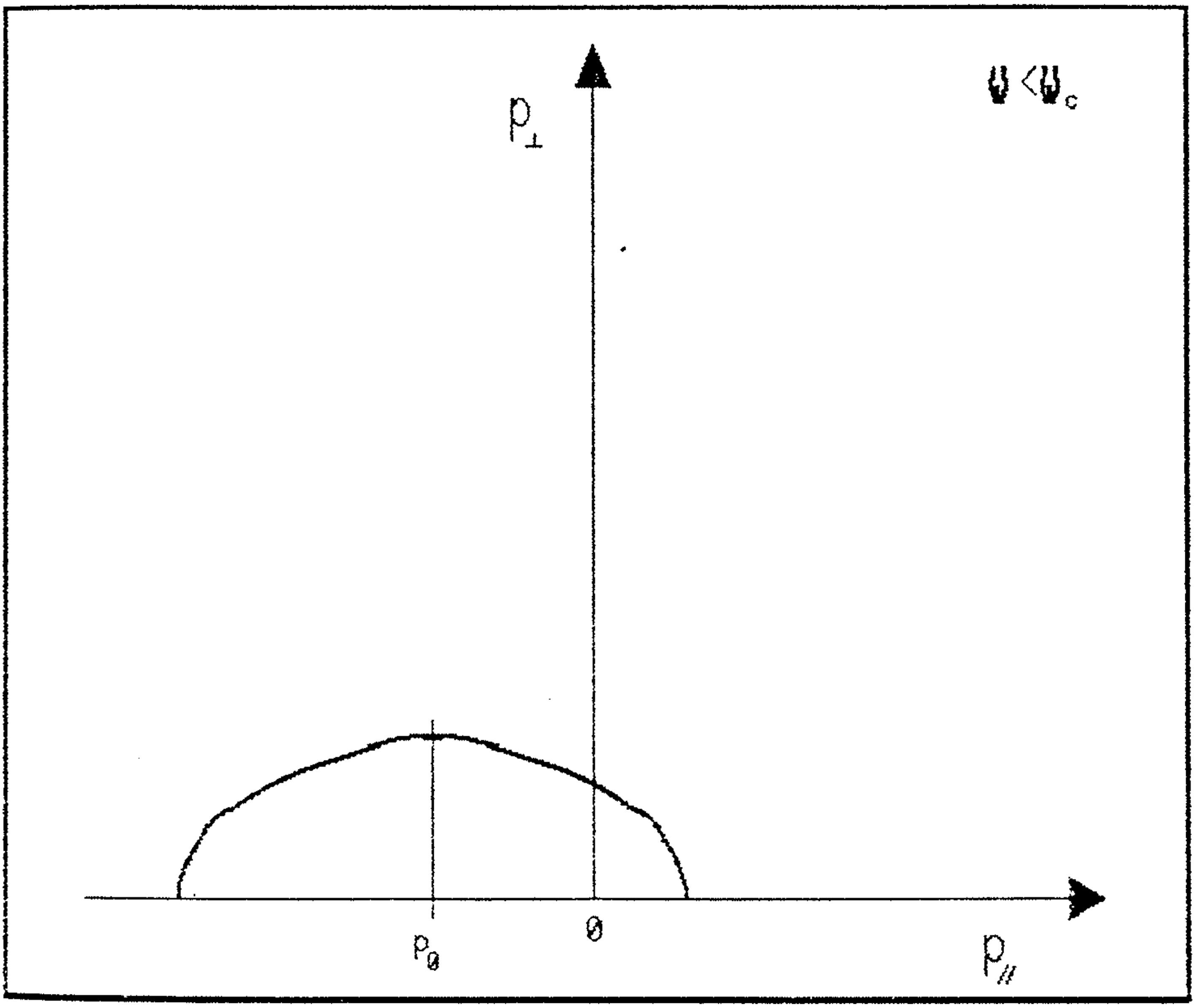
Allorchè $N_{\parallel}^2 > 1$, la (2.21) rappresenta una iperbole del tipo in Fig. 2.5, caratterizzata cioè dall'avere $\bar{p}_{\perp}=0$ per $\bar{p}_{\parallel}=\pm\sqrt{a}+p_0$. Anche in tale situazione $\bar{p}_{\perp}$ può assumere qualunque valore mentre $\bar{p}_{\parallel}$ tutti i valori tali che $\bar{p}_{\parallel}<-\sqrt{a}+p_0$ $\bar{p}_{\parallel}>\sqrt{a}+p_0$, inoltre non è possibile fare in modo che gli elettroni risonanti abbiano tutti $\bar{p}_{\parallel}$ concorde: ciò limita l'efficienza delle driven currents generate quando $N_{\parallel}^2 > 1$.

2.3 - Propagazione perpendicolare

Nel caso di propagazione perpendicolare al campo magnetico di equilibrio,

Fig. 2.3

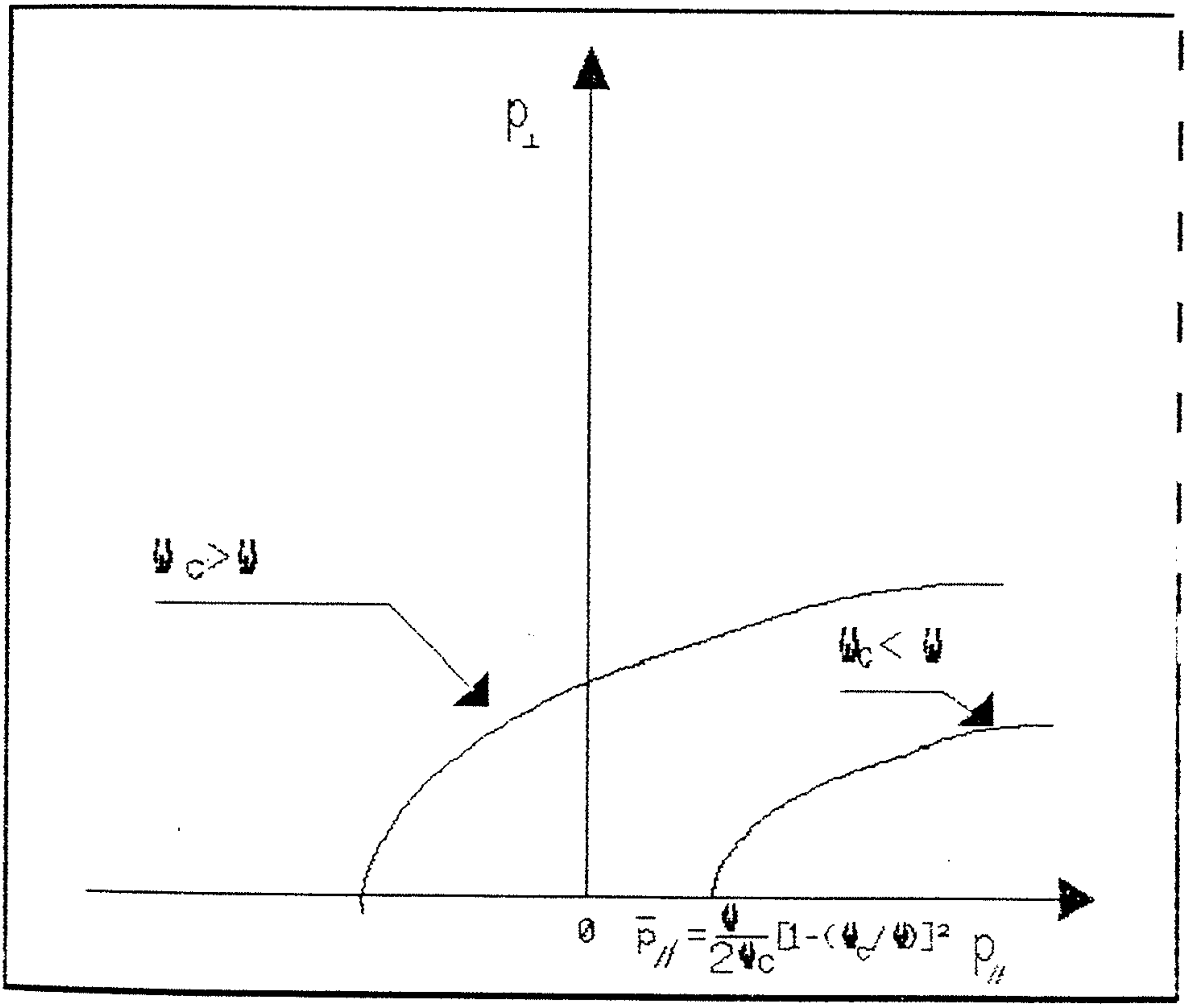
Fig. 2.3



Condizione di risonanza ciclotronica relativistica nello spazio dei momenti per $N_{/\!/}<0$

Fig. 2.4

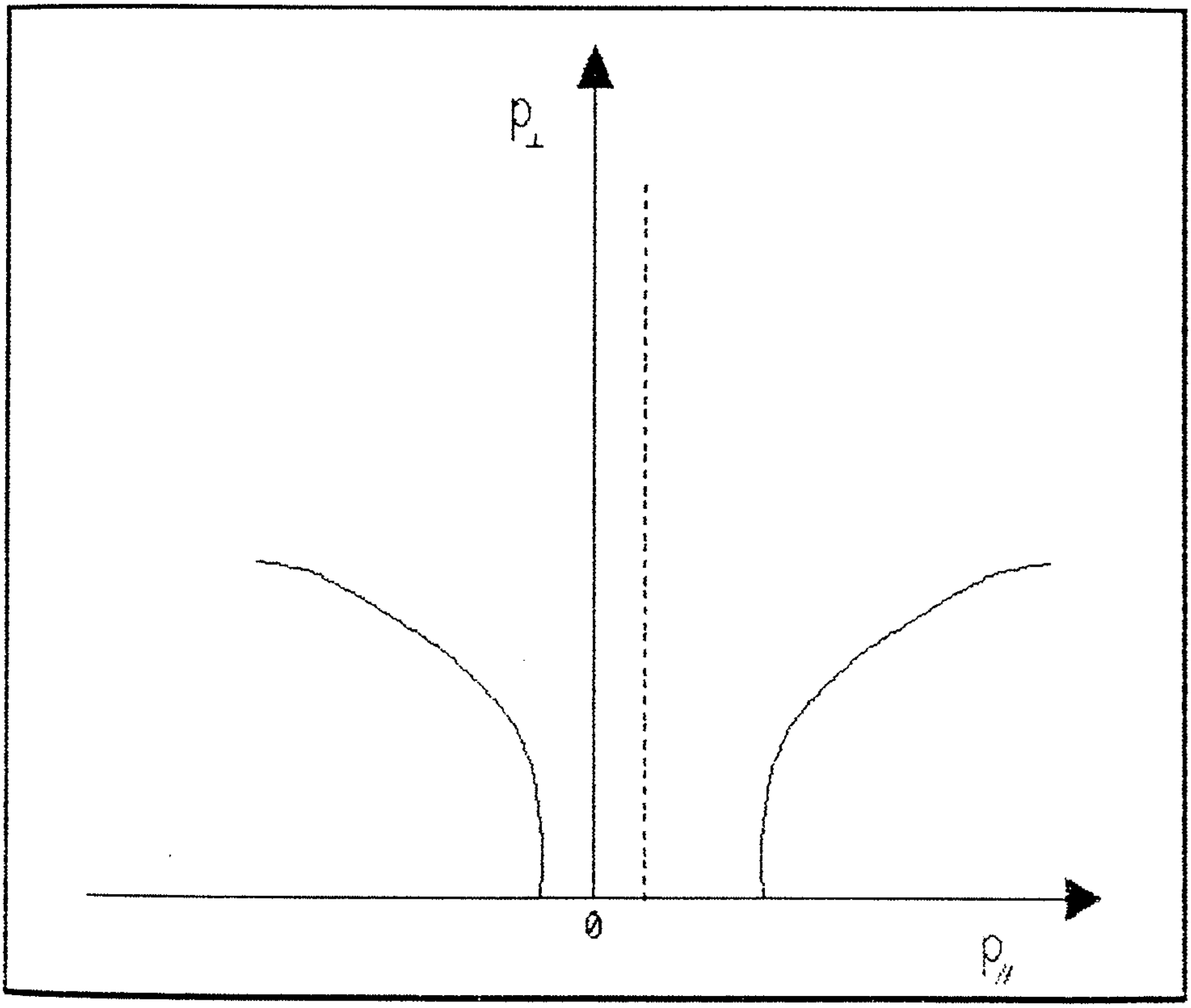
Fig. 2.4



Condizione di risonanza ciclotronica relativistica nello spazio dei momenti per $N^2_{//}=1$

Fig.2.5

Fig. 2.5



Condizione di risonanza ciclotronica relativistica nello spazio dei momenti per $N_{//}^2>1$

$B_\parallel$, si ha $N_\parallel=0$ e pertanto

$$U \equiv \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} + \frac{N_\parallel}{\gamma} F(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel) = \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} \tag{2.28}$$

mentre la relazione di dispersione (A.14') con $N_z=N_\parallel=0$, $N_y=0$, $N_x=N_\perp$ si scrive

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & -N_\perp^2+\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & -N_\perp^2+\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{2.29}$$

dove per la (B.18)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}+\frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\int_0^\infty d\bar{p}_\perp \bar{p}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_\parallel \frac{S_{ij}^{(n)}}{\bar{\omega}\gamma-n} + \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \delta_{iz}\delta_{jz} 2\pi\int_0^\infty d\bar{p}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_\parallel \bar{p}_\parallel F(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel) \tag{2.30}$$

e

$$S_{ij}^{(n)}= \begin{vmatrix} \bar{p}_\perp \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\left[\frac{n}{a}J_n\right]^2 & -i\bar{p}_\perp \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\frac{n}{a}J_nJ_n' & \bar{p}_\parallel \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\frac{n}{a}J_n^2 \\ i\bar{p}_\perp \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\frac{n}{a}J_nJ_n' & \bar{p}_\perp \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}J_n'^2 & i\bar{p}_\parallel \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}J_nJ_n' \\ \bar{p}_\parallel \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\frac{n}{a} & -i\bar{p}_\parallel \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}J_nJ_n' & \frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp}\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}J_n^2 \end{vmatrix} \tag{2.31}$$

ma allora se $\bar{f}_0$ è una funzione pari in $\bar{p}_\parallel$ (come avviene nel caso particolarmente interessante di una distribuziione di tipo Maxwelliano) S_{xz}, S_{yz}, S_{zx} e S_{zy} sono funzioni dispari in $\bar{p}_\parallel$, pertanto la corrispondente integrazione rispetto a $\bar{p}_\parallel$ in (2.30) è nulla. Da ciò segue che

$$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{zy}=0$$

e osservando che $\varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}$ la (2.29) diventa

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & -N_\perp^2+\varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}-N_\perp \end{vmatrix} = 0 \tag{2.32}$$

le cui soluzioni sono

$$N_\perp^2 = \epsilon_{zz} \qquad (2.33')$$

$$(\epsilon_{yy}-N_\perp^2)\epsilon_{xx}+\epsilon_{xy}^2=0 \qquad (2.33'')$$

a) <u>onda ordinaria</u> - o

Sostituendo la (2.33') nel sistema (A.13'), determiniamo il campo elettrico nel mezzo. Si ha

$$\begin{cases} \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y = 0 \\ \\ -\epsilon_{xy}E_x + (\epsilon_{yy}-\epsilon_{zz})E_y = 0 \end{cases}$$

e pertanto se $\epsilon_{xx}(\epsilon_{yy}-\epsilon_{zz})+\epsilon_{xy}^2 \neq 0$ allora segue che $E_x=E_y=0$

Il campo elettrico dell'onda è quindi del tipo

$$\underline{E} = (0,0,E_z)$$

ed è parallelo al campo magnetico d'equilibrio $\underline{B}_0=B_0\hat{z}$ e ortogonale alla direzione di propagazione $\underline{k}$, che per semplicità abbiamo scelto lungo l'asse $\hat{x}$.

L'onda è pertanto un' onda trasversa polarizzata linearmente ed è detta <u>onda ordinaria</u> (o). In questo caso l'equazione di Maxwell (A.1a') sipuò scrivere

$$-k_\perp E\,\hat{y} = \frac{\omega}{c}\underline{B} \Rightarrow \underline{B} = -k_\perp \frac{c}{\omega} E\,\hat{y}$$

Il vettore di Poynting (A.20) a sua volta si scrive

$$\underline{P}^{(o)} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}(\underline{E}\times\underline{B}^*) = \frac{c}{4\pi}\mathrm{Re}\left[\underline{E}\times(-k_\perp \frac{c}{\omega}E\hat{y})^*\right] = -\frac{c}{4\pi}k_\perp \frac{c}{\omega}\mathrm{Re}(\underline{E}\times(E^*\hat{y}))$$

ma

$$N_\perp^{(o)} \equiv k_\perp \frac{c}{\omega}$$

$$\left[\underline{E}\times(E^*\hat{y})\right] = \left[(E\hat{z})\times(E^*\hat{y})\right] = -|\underline{E}|^2\hat{x}$$

e pertanto

$$\underline{P}^{(o)} = \frac{c}{4\pi}N_\perp^{(o)}|\underline{E}|^2\hat{x} = \frac{c}{4\pi}N_\perp^{(o)}|\underline{E}|^2\hat{k} \qquad (2.34)$$

Il vettore di Poynting è cioè parallelo al vettore d'onda $\hat{k}$ e rappresenta il flusso di energia trasportata dall'onda

Poichè $\frac{|\underline{E}|^2}{4\pi}$ è una densità di energia, la sua velocità di propagazione, cioè la velocità di gruppo dell'onda, è

$$\underline{v}_{gr}^{(o)} = N_{\perp}^{(o)} c\hat{k} \tag{2.35}$$

Inoltre il flusso di energia di sloshing (A.21) vale

$$\underline{Q}^{(o)}(\underline{k}',\omega') = -\frac{\omega'}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon_{h,ij}}{\partial\underline{k}'}E_i^* E_j = 0 \tag{2.36}$$

nella approssimazione, in genere valida, che

$$\varepsilon_{ij} \approx \varepsilon_{ij}^{(freddo)}$$

dove $\varepsilon_{ij}^{(freddo)}$ è il tensore dielettrico nella approssimazione di plasma freddo analizzata al paragrafo 2.5.

Ma allora

$$\underline{S}^{(o)}(\underline{k}',\omega') \equiv \underline{P}^{(o)}(\underline{k}',\omega')+\underline{Q}^{(o)}(\underline{k}',\omega') = N_{\perp}^{(o)}\frac{c}{4\pi}|\underline{E}|^2\hat{k} \tag{2.37}$$

da cui si ricava il coefficiente di assorbimento spaziale per l'ennesima armonica

$$\alpha_n = \frac{\omega'}{4\pi}\frac{(\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E})_n}{|\underline{S}^{(o)}|}$$

e per la (2.12)

$$\alpha_n = -\frac{\pi}{N_{\perp}^{(o)}}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\bar{\omega}_p}{\bar{\omega}}\right]^2\int d^3\bar{p}\,\frac{\bar{p}_{\perp}^2}{\bar{p}_{\perp}}\frac{\partial\bar{f}_e}{\partial\bar{p}_{\perp}}J_n^2\delta(\gamma-n/\bar{\omega}) \tag{2.38}$$

Osserviamo che poichè $\gamma>0$, affinchè si possa avere la condizione di risonanza $\gamma-n/\bar{\omega}=0$, deve essere necessariamente $\omega\leq n\omega_c$. Inoltre il termine con $n=0$ è nullo e pertanto si ha $n\geq1$ quindi il coefficiente di assorbimento globale vale

$$\alpha^{(o)}_{(N_\parallel=0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = -\frac{\pi}{N_\perp^{(o)}} \frac{\omega}{c}\left[\frac{\bar{\omega}}{\omega}p\right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3\bar{p}\, \frac{\bar{p}_\parallel^2}{\bar{p}_\perp} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} J_n^2\, \delta(\gamma-n/\bar{\omega}) \qquad (2.38')$$

b) <u>onda straordinaria</u> - (x): $N_\perp^2=\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2/\varepsilon_{xx}$

Per determinare il campo elettrico dell'onda utilizziamo la (2.33") nel sistema (A.13). Si ha

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y=0 \\ -\varepsilon_{xy}E_x+(\varepsilon_{yy}-N_\perp^2)E_y=0 \\ (\varepsilon_{zz}-N_\perp^2)E_z=0 \end{cases} \qquad (2.39)$$

Se $\varepsilon_{zz}-N_\perp^2\neq 0$ segue immediatamente che $E_z=0$

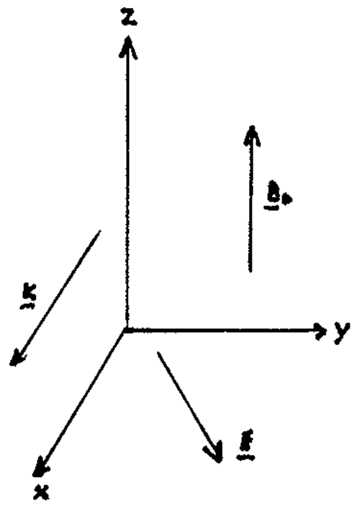
Dalla (2.33") ricaviamo

$$N_\perp^2 = \frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}} \equiv \left[N_\perp^{(x)}\right]^2 \qquad (2.40)$$

e quindi

$$E_y= -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} E_x$$

$$-\varepsilon_{xy}E_x-\left[\varepsilon_{yy}-\frac{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_{xx}}\right] \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} E_x=0$$



Pertanto

$$\underline{E} = (E_x, -\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}E_x, 0) \qquad (2.41)$$

cioè l'onda è polarizzata ellitticamente in un piano perpendicolare a $\underline{B}_0$.

Si ha cioè $\underline{E} \perp \underline{B}_0$. Dalla (A.1a') si ricava poi che

$$\underline{B} = (0,\ N_\perp E_x \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}},\ -N_\perp E_x \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}) \qquad (2.42)$$

Per la (A.20') e la (2.41) il vettore di Poynting vale, ricordando che $\underline{k}=k\hat{x}$,

$$\underline{P}_{\perp}^{(x)}=\frac{c^2}{4\pi\omega}\,k\,\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}\right)^2|E_x|^2 \tag{2.43}$$

Come già visto

$$\underline{Q}_{\perp}=0$$

con buona approssimazione e pertanto

$$\underline{S}_{\perp}^{(x)}=\underline{P}_{\perp}^{(x)}=\frac{c^2}{4\pi\omega}\,k\,\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}\right)^2|E_x|^2 \tag{2.44}$$

D'altra parte, con $N_{\parallel}=E_z=0$ e $E_y=-(\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{xy})E_y$, dalla (2.12) segue che

$$\begin{aligned}
(\underline{E}^{*}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E})_n &= -\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\perp}^2}\int\frac{d^3\overline{p}}{\gamma}\left[\frac{1}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\right]\left|\left[E_x+i\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}E_x\right]J_n-i\frac{a}{n}\,\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}J_{n+1}E_x\right|^2\delta\left(\gamma-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)\\
&= -\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\perp}^2}\int\frac{d^3\overline{p}}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\left|J_n+i\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}J_n-i\frac{a}{n}\,\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}J_{n+1}\right|^2|E_x|^2\delta\left(\gamma-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)\\
&= -\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\perp}^2}\int\frac{d^3\overline{p}}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\left|J_n+i\frac{a}{n}\,\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}J_n'\right|^2|E_x|^2\delta\left(\gamma-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Il coefficiente di assorbimento spaziale per la ennesima armonica vale allora

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(x)} &= \frac{\omega}{4\pi}\,\frac{(\underline{E}^{*}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E})_n}{|\underline{S}|}\\
&= \omega\,\frac{-\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\perp}^2}\int\frac{d^3\overline{p}}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\left|J_n+i\frac{a}{n}\,\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}J_n'\right|^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega)}{N_{\perp}\left|\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}}\right|^2}\\
&= -\frac{\pi\omega}{c}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\perp}^3}\int\frac{d^3\overline{p}}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n+i\frac{a}{n}J_n'\right|^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Per $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{(freddo)}$ si ha (cfr par. 2.5), poichè $\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n+i\frac{a}{n}J_n'$ diventa un immaginario puro,

$$\alpha_n^{(x)}(N_{\parallel}=0)=-\pi\,\frac{\omega}{c}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_{\parallel}^3}\int\frac{d^3\overline{p}}{\overline{p}_{\perp}}\,\frac{\partial\overline{f}_0}{\partial\overline{p}_{\perp}}\left[AJ_n+\frac{\omega}{n\omega_c}N_{\perp}\overline{p}_{\perp}J_n'\right]^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega) \tag{2.47}$$

che è una formula valida solo per n>1 (perchè per la prima armonica $\omega = \omega_c$ non è corretto applicare il limite di plasma freddo) (Bornatici and Ruffina, 1985) e dove

$$A = \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega} \frac{1}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2}$$

Il coefficiente di assorbimento globale è allora

$$\alpha_n^{(x)}(N_\parallel=0) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^{(x)}(N_\parallel=0)$$

1.4 - <u>Propagazione parallela:</u> $N_\perp=0$

Nel caso di propagazione parallela al campo magnetico d'equilibrio $\underline{B}_0$ si ha $\underline{N} = (0,0,N_\parallel)$.

La relazione di dispersione (A.14") assume pertanto la forma

$$\begin{vmatrix} -N_\parallel^2+\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & -N_\parallel^2+\varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \qquad (2.49)$$

dove ε_{ij} è espresso dalla (B.18).

Per determinare ε_{ij} da questa bisogna calcolare gli $S_{ij}^{(n)}$ sviluppando la (B.19), tuttavia per $N_\perp=0$ si ha

$$a = \bar{\omega}\, N_\perp \bar{p}_\perp = 0$$

e questo apparentemeænte provoca problemi di convergenza per gli $S_{ij}^{(n)}$.

Utilizziamo allora lo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel

$$J_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

e ricordiamo che

$$J_{-n}(a) = (-1)^n J_n(a)$$

Da ciò segue che

$$\frac{n}{a} J_n(a) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a/2)^{n+2k-1}}{k!\ \Gamma(n+k+1)} \tag{2.50}$$

Per $n>0$ si ha $n+2k-1\geq 0$ e quindi se $a\to 0$ l'unico termine diverso da zero è quello per cui $n=1$ e $k=0$ per il quale si ha

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} J_1(a) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}$$

Per $n=0$ ovviamente si ha zero

Per $n<0$ infine

$$\frac{n}{a} J_n = \frac{n}{a} J_{-n}(-1)^n$$

e quindi l'unico termine diverso da zero è quello per cui $-n=1$ e $k=0$ per il quale

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} J_{-1}(a) = \frac{1}{2}$$

Pertanto dalla (B.19)

$$S^n_{xx} = \frac{1}{4}\ \bar{p}_\perp U\ \delta(n\pm 1)$$

Ricordiamo ora che

$$J'_n = \frac{1}{2} \left\{ J_{n-1} - J_{n+1} \right\}$$

Da ciò segue che

$$\lim_{a\to 0} \frac{n}{a} J_n J'_n = \lim_{a\to 0} \frac{1}{2} \frac{n}{a} J_n \left\{ J_{n-1} - J_{n+1} \right\}$$

ma poichè

$$\lim_{a\to 0} J_{n\pm 1} = \delta(n\pm 1)a \quad \Rightarrow \quad \lim_{a\to 0} \frac{n}{a} J_n J'_n = \frac{1}{4}\,\delta(n\pm 1)$$

e quindi

$$S^n_{xy} = -S^n_{yx} = -\frac{i}{4}\,\bar{p}_\perp U\,\delta(n\pm 1)$$

Allo stesso modo si ricava che

$$\begin{cases} S^n_{xz} = S^n_{zx} = 0 \\ S^n_{yy} = \frac{1}{4}\,\bar{p}_\perp U\,\delta(n\pm 1) \\ S^n_{yz} = -S^n_{zy} = 0 \\ S^n_{zz} = \dfrac{\bar{p}^2_\parallel}{\bar{p}_\perp}\,U\,J^2_n\,\delta(n) \end{cases}$$

riassumendo

$$S^n_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\bar{p}_\perp U\delta(n\pm 1) & -\frac{i}{4}\bar{p}_\perp U\delta(n\pm 1) & 0 \\ \frac{i}{4}\bar{p}_\perp U\delta(n\pm 1) & \frac{1}{4}\bar{p}_\perp U\delta(n\pm 1) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\bar{p}^2_\parallel}{\bar{p}_\perp} U\delta(n) \end{vmatrix} \tag{2.51}$$

Sostituendo la (2.51) nella (B:18) si ottiene

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=1+\dfrac{\bar{\omega}^2_p}{\bar{\omega}}\,\dfrac{1}{4}\displaystyle\int d^3\bar{p}\;\bar{p}_\perp U\left[\frac{1}{\bar{\omega}\gamma-\bar{\omega}N_\parallel\bar{p}_\parallel+1}+\frac{1}{\bar{\omega}\gamma-\bar{\omega}N_\parallel\bar{p}_\parallel-1}\right] \\ \varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}=\dfrac{-i\,\bar{\omega}^2_p}{\bar{\omega}}\,\dfrac{1}{4}\displaystyle\int d^3\bar{p}\bar{p}_\perp U\left[\frac{1}{\bar{\omega}\gamma-\bar{\omega}N_\parallel\bar{p}_\parallel+1}+\frac{1}{\bar{\omega}\gamma-\bar{\omega}N_\parallel\bar{p}_\parallel-1}\right]=i(\varepsilon_{xx}-1) \\ \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=0 \\ \varepsilon_{zz}=1+\dfrac{\bar{\omega}^2_p}{\bar{\omega}}\displaystyle\int d^3\bar{p}\;\frac{U(\bar{p}^2_\parallel/\bar{p}_\perp)}{\bar{\omega}\gamma-\bar{\omega}N_\parallel\bar{p}_\parallel}+\left[\frac{\bar{\omega}^2_p}{\bar{\omega}}\right]\int d^3\bar{p}\;(\bar{p}_\parallel/\bar{p}_\perp)\,F(\bar{p}_\perp,\bar{p}_\parallel) \end{cases} \tag{2.52}$$

dove le uguaglianze trovate sono dovute alla simmetria assiale del sistema.

L'equazione di dispersione (2.49) diventa

$$\begin{vmatrix} -N_\parallel^2+\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & -N_\parallel^2+\varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.49')$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz}=0 \\ \varepsilon_{xx}+i\varepsilon_{xy} = N_\parallel^2 \\ \varepsilon_{xx}-i\varepsilon_{xy} = N_\parallel^2 \end{cases} \qquad (2.53)$$

a) Consideriamo il caso $\varepsilon_{zz}=0$

Sostituendo nel sistema (A.13') si ottiene

$$\begin{cases} (-N_\parallel^2+\varepsilon_{xx})\, E_x+\varepsilon_{xy}E_y=0 \\ -\varepsilon_{xy}E_x+(-N_\parallel^2+\varepsilon_{xx})E_y=0 \\ E_z=\text{arbitrario} \end{cases}$$

ma questo implica

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = \text{arbitrario} \end{cases}$$

cioè

$$\underline{E} = (0,0,E_z) \qquad (2.54)$$

Il campo elettrico dell'onda è quindi parallelo al campo magnetico d'equilibrio e alla direzione di propagazione $\hat{k}$: si tratta pertanto di onde longitudinali (L).

Dalla (A.1a') segue immediatamnte che $\underline{B}=0$ e quindi è nullo anche il vettore di Poynting $\underline{P}$: ciò significa che queste onde non trasportano energia elettromagnetica ma è diverso da zero solamente il flusso di energia di sloshing

$$Q = -\frac{\omega}{8\pi}\frac{\partial}{\partial \underline{k}'}\varepsilon_{h,ij}E_i^*E_j = -\frac{\omega}{8\pi}\frac{\partial}{\partial \underline{k}'}\varepsilon_{h,zz}|E_z|^2$$

Nello stesso tempo per la (2.12)

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2|E_z|^2\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\,\bar{p}_\parallel^2\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n\omega_c/\omega)$$

Ma per $N_\perp=0$, $J_n(a)$ con $a\equiv\bar{\omega}N_\perp\bar{p}_\perp$ è non nullo soltanto per $n=0$ dove si ha $J_0(0)=1$ quindi

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2|E_z|^2\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\,\bar{p}_\parallel^2\,N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel)$$

$$= -\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2|E_z|^2\int d^3\bar{p}\,\bar{p}_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel)$$

e pertanto il coefficiente di assorbimento spaziale risulta

$$\alpha\binom{(L)}{(N_\perp=0)} = -2\pi\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial\underline{k}'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\int d^3\bar{p}\,\bar{p}_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\,\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel) \qquad (2.55)$$

b) Consideriamo i casi $\varepsilon_{xx}\pm i\varepsilon_{xy}=N_\parallel^2$. Sostituendo nel sistema (A.13') si ottiene

$$\begin{cases}(-N_\parallel^2+\varepsilon_{xx})E_x+\varepsilon_{xy}E_y=\mp i\varepsilon_{xy}E_x+\varepsilon_{xy}E_y = 0\\ -\varepsilon_{xy}E_x+(-N_\parallel^2+\varepsilon_{xx})E_y=-\varepsilon_{xy}E_x\mp i\varepsilon_{xy}E_y = 0\\ \varepsilon_{zz}E_z = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_z=0\\ E_y=\pm iE_x\end{cases}$$

e cioè

$$\underline{E} = (E_x,\pm iE_x,0) \qquad (2.56)$$

Il campo elettrico dell'onda è pertanto ortogonale al campo magnetico d'equilibrio e alla direzione di propagazione $\underline{k}$. La situazione corrisponde a onde circolarmente polarizzate rispettivamente destrogire (RH) o levogire (LH), cioè con verso di rotazione concorde o discorde con quello di percorrenza delle orbite di Larmor da parte degli elettroni (Jackson, 1962)[1].

Dalla (A.1a') segue che

$$\underline{B} = (\mp iE_x k\hat{x} + E_x k\hat{y})\frac{c}{\omega}$$

da cui, ricordando che $k_\parallel = \frac{\omega}{c} N_\parallel$, si ottiene che

$$\underline{B} = (\mp iN_\parallel E_x,\ N_\parallel E_x,\ 0) \tag{2.57}$$

Dalla (2.57) e dalla (2.56) deriva che

$$\underline{P} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{Re}(\underline{E}\times\underline{B}^*) = \frac{c}{2\pi} N_\parallel |E_x|^2\hat{z} \tag{2.58}$$

Nell'usuale ipotesi in cui $\underline{Q}=0$ si ha

$$\underline{S} = \underline{P} = \frac{c}{2\pi} N_\parallel |E_x|^2\hat{z} \tag{2.59}$$

Nel contempo dalla (2.12) segue che

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = -\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{n\omega_c}{\omega}\right)^2\frac{1}{N_\perp^2}\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\,U\left|\left[E_x - iE_y\right]J_n + i\frac{a}{n}J_{n+1}E_y\right|^2\delta(\gamma - N_\parallel\bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega)$$

$$= -\pi\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\,\bar{p}_\perp^2\,U\left|\left[E_x - iE_y\right]\frac{n}{a}J_n + iJ_{n+1}E_y\right|^2\delta(\gamma - N_\parallel\bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega)$$

---

[1] In molti testi si parla di onda destrogira riferendosi a quella tale che $\underline{E}=(E_x,-iE_y,0)$: la spiegazione di questa differenza è data nella nota 1 della Appendice A.

i) Per polarizzazione <u>destrogira</u> (RH) $\Rightarrow E_y = iE_x$ e pertanto

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = -\pi \left[\frac{\omega_p}{\omega} \right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma} \, \bar{p}_\perp^2 U \left| 2\frac{n}{a} J_n - J_{n+1} \right|^2 |E_x|^2 \, \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega)$$

Al limite per $a \to 0$

$$\frac{n}{a} J_n = \frac{1}{2} \delta(n \pm 1)$$

$$J_{n+1} = \delta(n+1)$$

e pertanto rimane solo il contributo della armonica con n=1, cioè

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = -\pi \left[\frac{\omega_p}{\omega} \right]^2 \int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma} \, \bar{p}_\perp^2 U |E_x|^2 \, \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) \qquad (2.60)$$

Quindi il coefficiente di assorbimento spaziale vale

$$\alpha^{(RH)}(N_\perp = 0) = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{cN_\parallel} \left[\frac{\omega_p}{\omega} \right]^2 \int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma} \, \bar{p}_\perp^2 \left[\frac{1}{\bar{p}_\perp} \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\perp} + N_\parallel \frac{\partial \bar{F}_0}{\partial \bar{p}_\parallel} \right] \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - \omega_c/\omega) \qquad (2.61)$$

Questo corrisponde fisicamente al fatto che l'onda cede energia al plasma accelerandone gli elettroni e pertanto si smorza.

ii) Per polarizzazione <u>levogira</u> (LH) $\Rightarrow E_y = -iE_x$ e pertanto

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = -\pi \omega_c^2 \left[\frac{\omega_p}{\omega} \right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3\bar{p}}{\gamma} \, \bar{p}_\perp^2 U \left| J_{n+1} \right|^2 |E_x|^2 \, \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega)$$

ma al limite per $a \to 0$ si ha $J_{n+1} = \delta(n+1)$ e perciò l'unico contributo è relativo all'armonica n=-1

In questo caso però la condizione di risonanza ciclotronica relativistica (2.19) si può scrivere

$$\bar{p}_\parallel = \frac{\gamma + \omega_c/\omega}{N_\parallel}$$

ma poichè la velocità delle particelle deve essere minore di quella della luce è necessariamente $\bar{p}_\parallel < 1$ da ciò segue che

$$N_\parallel > \gamma + \omega_c/\omega > 1$$

Nello stesso tempo dalla relazione di dispersione (2.53) applicata al caso del limite freddo si ha per la (2.68)

$$N_\parallel^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} + \frac{\omega_c}{\omega}\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)} < 1$$

Ciò significa che non è mai verificata la condizione di risonanza ciclotronica e pertanto

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_a \cdot \underline{E} = 0 \tag{2.62}$$

e

$$\alpha^{(LH)}(N_\perp = 0) = 0 \tag{2.63}$$

Quindi per onde polarizzate circolarmente e in verso discorde con quello delle orbite di Larmor degli elettroni il coefficiente di assorbimento spaziale è nullo.

2.5 - Limite di plasma freddo

Consideriamo un plasma Maxwelliano, cioè tale che

$$f_0^{(Max)} = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-p^2/(2mT)} = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-p_\parallel^2/(2mT)} e^{-p_\perp^2/(2mT)} \tag{2.64}$$

Nel limite freddo, cioè al limite per $T \to 0$ si ha

$$\lim_{T\to 0} f_0^{(Max)} = \delta(p_\parallel)\frac{\delta(p_\perp)}{2\pi p_\perp} \tag{2.65}$$

In questo limite il tensore dielettrico espresso dalla (B.18) si può scrivere

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\bar{\omega}-n} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_\parallel \int_0^{\infty} d\bar{p}_\perp\, \bar{p}_\perp\, S_{ij}^{(n)} + \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \delta_{iz}\delta_{jz} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_\parallel \int_0^{\infty} d\bar{p}_\perp \bar{p}_\perp \bar{p}_\parallel F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \tag{2.66}$$

poichè per $p \to 0 \Rightarrow \gamma \to 1$ e pertanto $\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}N_{\parallel}\bar{p}_{\parallel} - n \to \bar{\omega} - n$

In particolare dalla (B.19) segue che

$$\varepsilon_{xx} = 1 + 2\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}-n} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_{\parallel} \int_0^{\infty} d\bar{p}_{\perp} \bar{p}_{\perp}^2 \, U \left(\frac{n}{a} J_n(a)\right)^2 \qquad (2.67)$$

dove $a = \bar{\omega} N_{\perp} \bar{p}_{\perp}$ e

$$U \equiv \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\perp}} + \frac{N_{\parallel}}{\gamma}\left[\bar{p}_{\perp}\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\parallel}} - \bar{p}_{\parallel}\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\perp}}\right] = \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\perp}}$$

Pertanto

$$\varepsilon_{xx} - 1 = 2\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}-n} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_{\parallel} \int_0^{\infty} d\bar{p}_{\perp} \bar{p}_{\perp}^2 \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\perp}} \left(\frac{n}{a} J_n(a)\right)^2$$

$$= 2\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}-n} \int_0^{\infty} d\bar{p}_{\perp} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_{\perp}} \left(\bar{p}_{\perp} \frac{n}{a} J_n(a)\right)^2$$

integrando per parti

$$\varepsilon_{xx} - 1 = -2\pi \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}-n} \int_0^{\infty} d\bar{p}_{\perp} \frac{\delta(\bar{p}_{\perp})}{2\pi \bar{p}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{\perp}} \left[\bar{p}_{\perp} \frac{n}{a} J_n(a)\right]^2$$

$$= -\frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum \frac{1}{\bar{\omega}-n} \int \frac{\delta(a)}{a} \frac{\partial}{\partial a} (n J_n(a))^2 \, da$$

$$= -\frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum \frac{1}{\bar{\omega}-n} \left|\frac{2n^2}{a} J_n(a) J'_n(a)\right|_{a=0}^2$$

dove si è utilizzato il fatto che $\delta(cx) = \delta(x)/|c|$.

Ricordando che $J_n(0) = \delta(n)$ e utilizzando lo sviluppo in serie delle J_n, si ottiene

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}$$

Con un calcolo analogo si ricava anche che

$$\varepsilon_{zz}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \varepsilon_{xy}=i\,\frac{\omega_c}{\omega}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} \qquad \varepsilon_{xz}=0$$

Applicando le relazioni di simmetria (B.21) si può quindi scrivere

$$\varepsilon_{ij}^{(freddo)}=\begin{vmatrix} 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & i\frac{\omega_c}{\omega}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ -i\frac{\omega_c}{\omega}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{vmatrix} \qquad (2.68)$$

Come si può vedere dalla (2.68) il limite di plasma freddo non è applicabile per frequenze vicine alla prima armonica, cioè per $\omega^2=\omega_c^2$.

La relazione di dispersione (A.14) diventa

$$\left|\frac{c^2}{\omega^2}\left[\underline{kk}-k^2\underline{\underline{I}}\right]+\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega)\right| = \begin{vmatrix} N_x^2-N^2+\varepsilon_{xx} & N_xN_y+\varepsilon_{xy} & N_xN_z \\ N_xN_y-\varepsilon_{xy} & N_y^2-N^2+\varepsilon_{xx} & N_yN_z \\ N_xN_z & N_yN_z & N_z^2-N^2+\varepsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.69)$$

Dalla (2.68) segue immediatamente che $\varepsilon_{a,ij}=0$ e pertanto, per la (A.24'), anche il coefficiente di assorbimento spaziale

$$\alpha^{(freddo)}=0$$

Nel limite freddo quindi non si ha assorbimento.

Nel caso di <u>propagazione perpendicolare</u> la relazione di dispersione assume la forma (2.29). Per l'<u>onda ordinaria</u> si ha

$$\left[N_\perp^{(o)}\right]^2=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{h,zz}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (2.70)$$

e quindi, poichè $(N_\perp^{(o)})^2 \geq 0$, deve essere

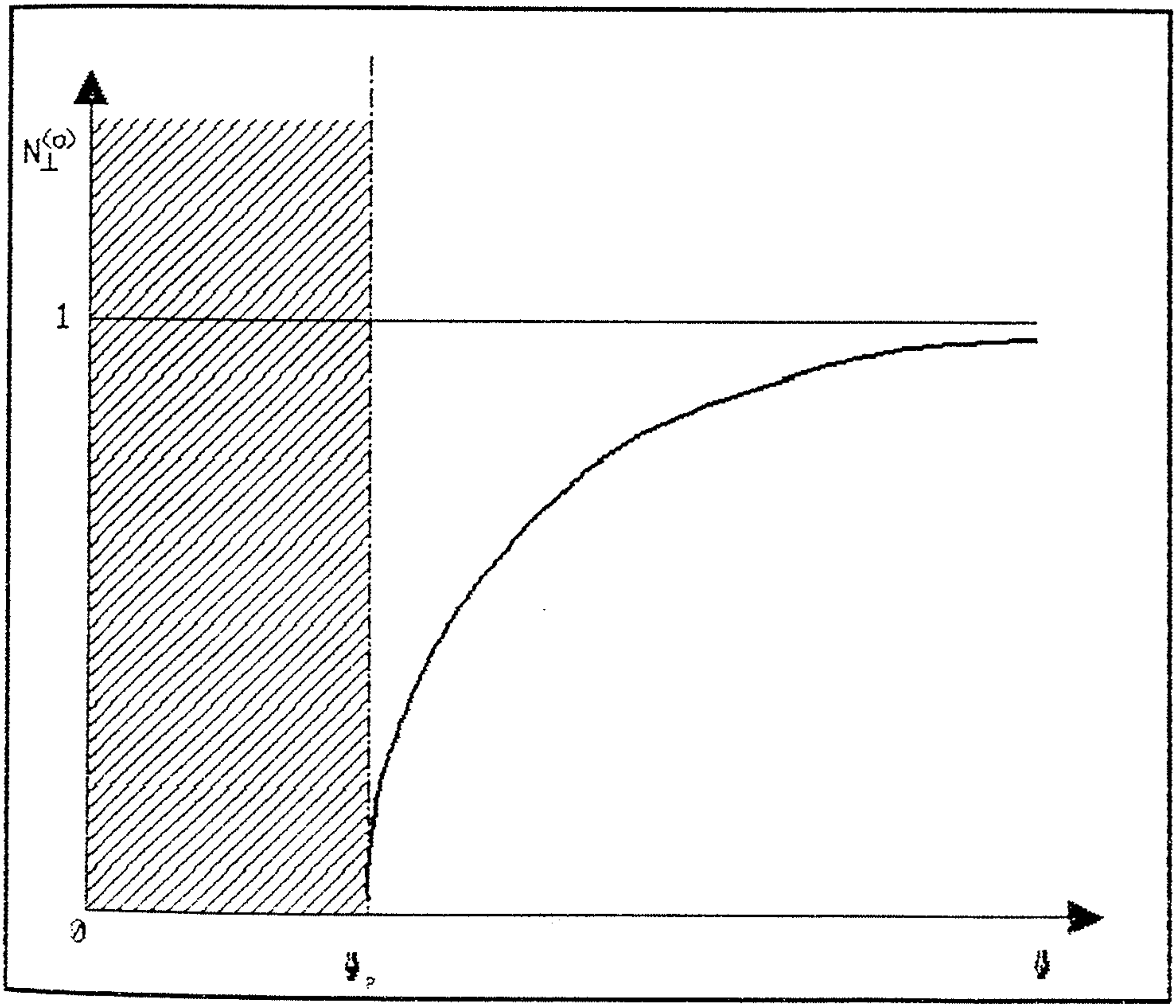
$$\omega_p < \omega \qquad (2.71)$$

Ciò significa che vi è una banda proibita (Fig. 2.6) per le onde che si propagano in un mezzo con frequenza di plasma

$$\omega_p \equiv \left[\frac{4\pi n_e q^2}{m}\right]^{1/2}$$

Fig. 2.6

Fig. 2.6



Indice di rifrazione in funzione della frequenza per propagazione perpendicolare - onda ordinaria nel limite freddo.

Per l'onda straordinaria dalle (2.33") e (2.68) segue che

$$(\varepsilon_{yy}-N_\perp^2)\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{xy}^2 = \left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}-N_\perp^2\right]\left[1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}\right]-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\frac{\omega_p^4}{(\omega^2-\omega_c^2)^2}$$

$$= N_\perp^2\left[\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}-1\right]+1-\frac{2\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2}+\frac{\omega_p^4}{(\omega^2-\omega_p^2)^2}\left[1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right] = 0$$

e pertanto

$$N_\perp^{(x)} = \left[1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega^2-\omega_p^2}{\omega_p^2-\omega^2+\omega_c^2}\right]^{1/2} \tag{2.72}$$

Tale funzione diverge per

$$\omega^2=\omega_p^2+\omega_c^2\equiv\omega_{UH}^2 \tag{2.73'}$$

che è la frequenza di risonanza detta upper hybrid, e si annulla per

$$\omega = \left[\frac{2\omega_p^2+\omega_c^2+\sqrt{(2\omega_p^2+\omega_c^2)^2-4\omega_p^4}}{2}\right]^{1/2} \equiv \omega_\ell^{(F)} \tag{2.73"}$$

$$\omega = \left[\frac{2\omega_p^2+\omega_c^2-\sqrt{(2\omega_p^2+\omega_c^2)^2-4\omega_p^4}}{2}\right]^{1/2} \equiv \omega_\ell^{(S)} \tag{2.73'''}$$

Lo studio analitico della funzione, con la condizione che $N_\perp^{(x)}\geq 0$, permette di determinarne l'andamento (Bekefi, 1966) (Fig. 2.7).

Il ramo $\omega_\ell \leq \omega < \omega_{UH}$ è detto slow extraordinary mode mentre quello $\omega_{RH} \leq \omega < \infty$ è detto fast extraodinary mode e ω_ℓ e ω_{RH} sono dette frequenze di cut-off.

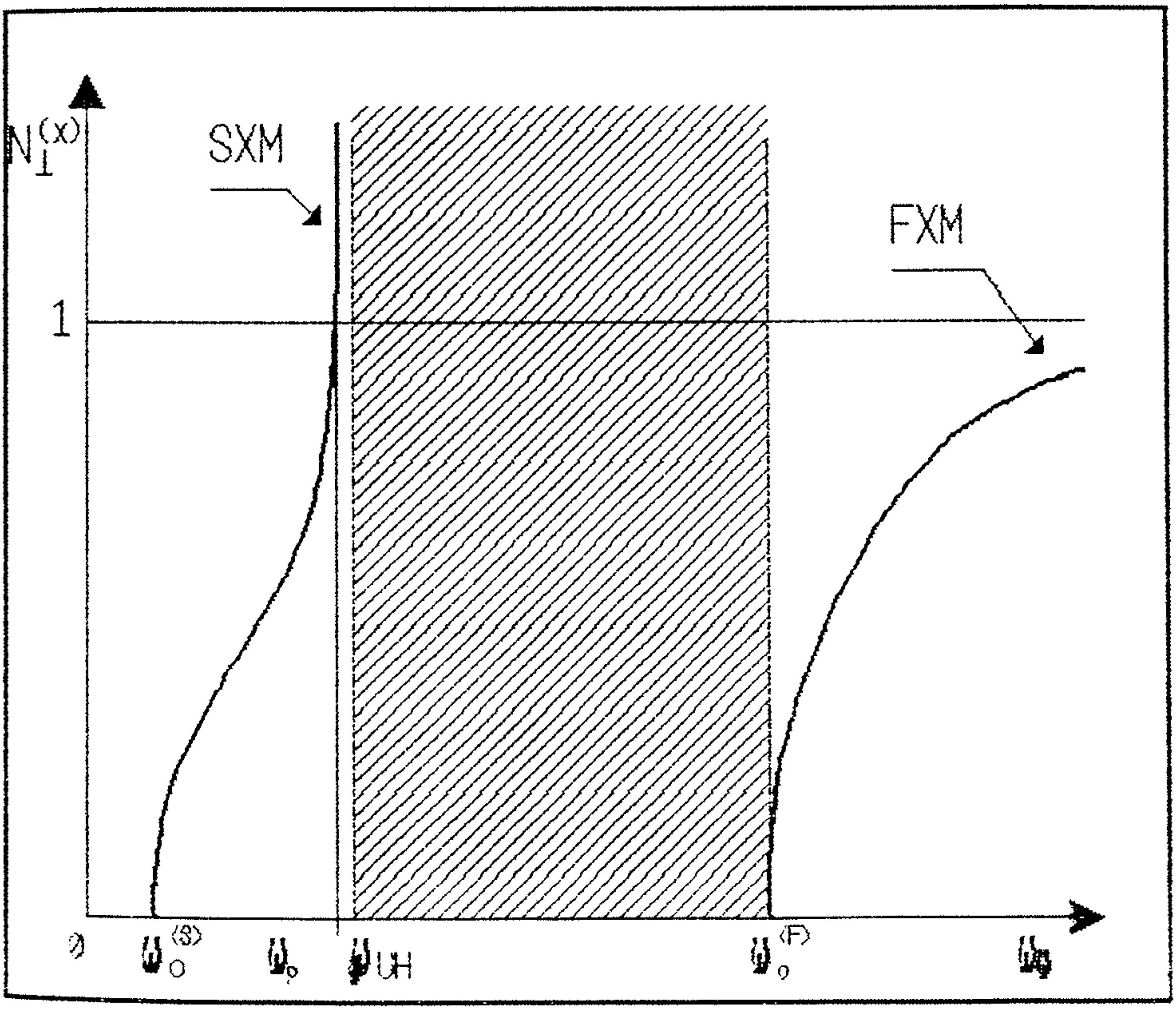
Per propagazione parallela nel caso $\varepsilon_{zz}=0$ deve necessariamente essere $\omega=\omega_p$, il che riflette il fatto che questo caso corrisponde a oscillazioni del plasma e non a propagazione di onde elettromagnetiche.

Più interessanti sono i 2 casi

$$N_\parallel^2 = \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{xy}$$

Fig. 2.7

Fig. 2.7



Indice di rifrazione in funzione della frequenza per propagazione perpendicolare - onda straordinaria nel limite freddo

Si ha infatti

$$N_{\parallel}^2 = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} \mp \frac{\omega_c}{\omega}\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{1}{\omega\mp\omega_c} \qquad (2.74)$$

Separiamo i due casi:

a) $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{xx}+i\varepsilon_{xy} = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{1}{\omega-\omega_c}$

Questo caso è detto dell'onda RH poichè corrisponde a onde circolarmente polarizzate right handed.

$N_{\parallel}$ diverge (Fig. 2.8) per $\omega=0$ e per $\omega=\omega_c$ che sono frequenze di risonanza (Chen, 1974), mentre si annulla per

$$\omega^2 - \omega_c\omega - \omega_p^2 = 0$$

cioè per la frequenza di cut-off

$$\omega_i^{(RH)} = \frac{\omega_c+\sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}}{2} \qquad (2.75)$$

Poichè $N_{\parallel}$ deve essere positivo o nullo, non si può avere RH-wave per $\omega_c \le \omega < \omega_R$ e $N_{\parallel}$ ha un minimo per $\omega = \omega_c/2$.

b) $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{xx} - i\varepsilon_{xy} = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{1}{\omega+\omega_c}$

Questo caso è detto dell'onda LH (da left handed) e corrisponde a onde levogire (Fig. 2.8).

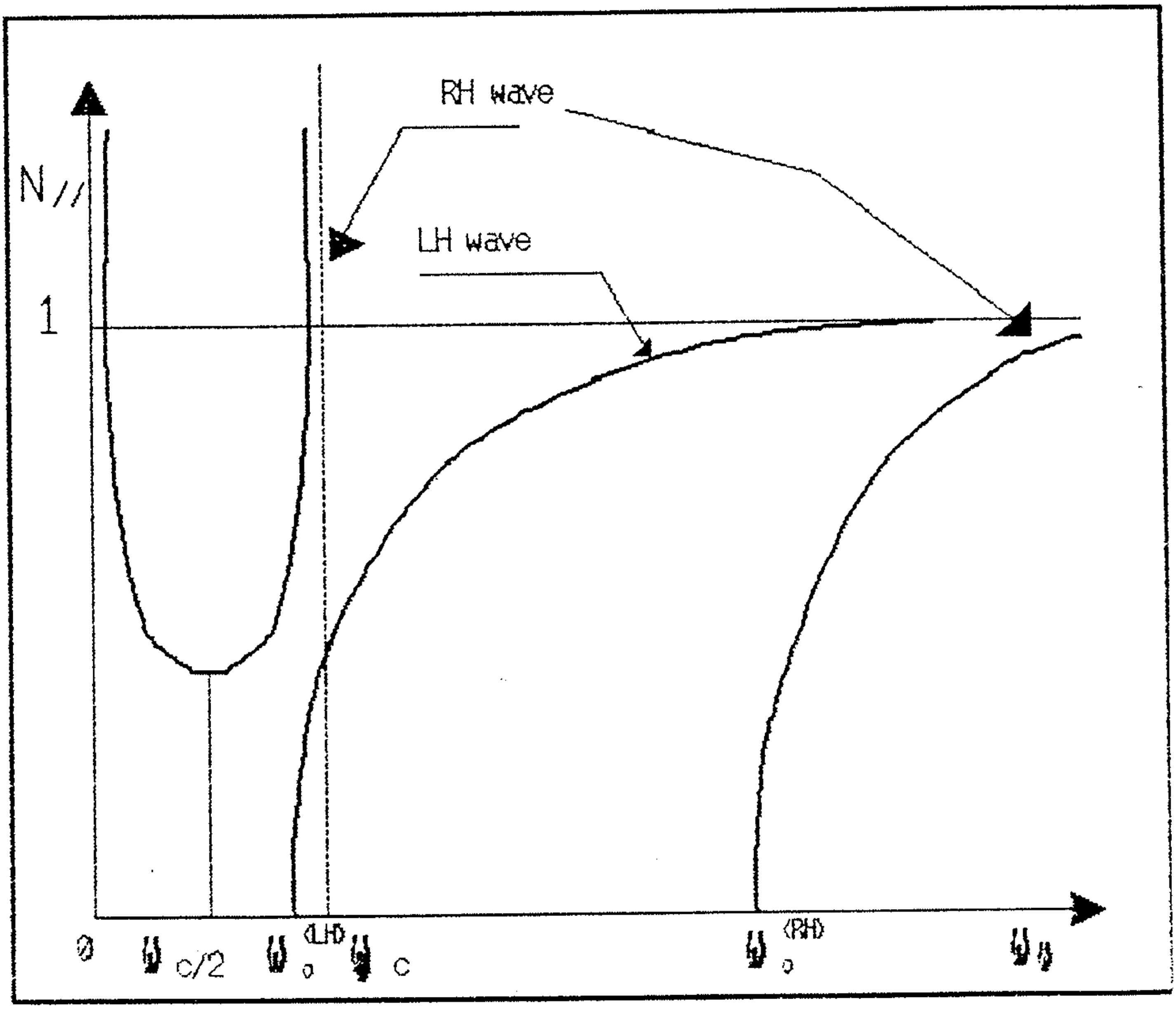
Per questa situazione non si hanno frequenze di risonanza mentre si ha un cut-off per

$$\omega_i^{(LH)} = \frac{-\omega_c+\sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}}{2} \qquad (2.76)$$

Inoltre si possono avere L-wave solo per $\omega \ge \omega_L$.

Fig. 2.8

Fig. 2.8



Indice di rifrazione in funzione della frequenza per propagazione parallela nel limite freddo

2.6 - Approssimazione elettrostatica

L'approssimazione elettrostatica consiste nel porre

$$\underline{B}(\underline{k},\omega) = 0 \tag{2.77}$$

In questo caso la (A.1a') diventa

$$\underline{k}\times\underline{E}(\underline{k},\omega) = 0$$

e pertanto

$$\underline{E}(\underline{k},\omega) = E\,\hat{\underline{k}} \tag{2.78}$$

Nello stesso tempo la (A.4') assume la forma

$$\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{E} = -\frac{4\pi i}{c^2}\,\omega\,\underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{E}$$

e quindi si ha

$$\frac{\omega^2}{c^2}\left[\underline{\underline{I}}+\frac{4\pi i}{\omega}\,\underline{\underline{\sigma}}\right]\cdot\underline{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\,E\,\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\hat{\underline{k}} = 0$$

Ciò significa che

$$\varepsilon^{el} \equiv \hat{\underline{k}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\hat{\underline{k}} = 0 \tag{2.79}$$

che è l'equazione di dispersione per onde elettrostatiche, dove ε^{el} è la costante dielettrica elettrostatica ed è uno scalare.

Poichè $\underline{k}=\underline{k}'+i\underline{k}''$, con $\underline{k}''\ll\underline{k}'$ nell'ipotesi di debole smorzamento (cfr. App. A), si ha

$$\varepsilon^{el}(\underline{k},\omega)=\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}'+i\underline{k}'',\omega)+i\ \mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}'+i\underline{k}'',\omega) = 0 \tag{2.80}$$

dove

$$\mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k},\omega) \equiv \hat{\underline{k}}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\hat{\underline{k}}$$

Sviluppando in serie di Taylor nell'intorno di $\underline{k}'$ all'ordine più basso significativo in $\underline{k}''$ si ha

$$\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}'+i\underline{k}'',\omega)=\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)+i\underline{k}''\cdot\frac{\partial\ \mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)}{\partial\underline{k}}+0$$

dove 0 indica termini di ordine superiore. Nello stesso tempo

$$\mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}'+i\underline{k}'',\omega)=\mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)+0$$

e pertanto la (2.80) diventa

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)=0\\ \underline{k}''\cdot\dfrac{\partial\ \mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}}+\mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)=0\end{cases}$$

Nell'ipotesi di debole smorzamento

$$\frac{\partial\ \mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}}\simeq\frac{\partial\ \mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}'}$$

e pertanto si ha

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)=0\\ \mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}(\underline{k}',\omega)=-\underline{k}''\cdot\dfrac{\partial\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}'}\end{cases}\qquad(2.80')$$

Calcoliamo il coefficiente di assorbimento spaziale definito dalla (A.24). A questo scopo osserviamo che per la (2.77) il vettore di poynting è nullo, cioè

$$\underline{P}=0$$

e pertanto nel calcolo del flusso totale della densità di energia elettromagnetica non è possibile trascurare il flusso di energia di sloshing.

Si ha

$$\underline{S}^{el}=\underline{Q}=-\frac{\omega}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon_{h,ij}}{\partial\underline{k}'}E_i^*E_j=-\frac{\omega}{8\pi}|\underline{E}|^2\frac{\partial\varepsilon_{h,ij}}{\partial\underline{k}'}\frac{k_ik_j}{k^2}$$

$$=-\frac{\omega}{8\pi}\frac{|\underline{E}|^2}{k^2}\left[\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}\left[\varepsilon_{h,ij}k_ik_j\right]-\varepsilon_{h,ij}\frac{\partial(k_ik_j)}{\partial\underline{k}'}\right]$$

$$=-\frac{\omega}{8\pi}\frac{|\underline{E}|^2}{k^2}\left[\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}\left[k^2\ \mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}\right]-\varepsilon_{h,ij}\left[k_j\frac{k_i}{k}+k_i\frac{k_j}{k}\right]\right]$$

$$=-\frac{\omega}{8\pi}\frac{|\underline{E}|^2}{k^2}\left[k^2\frac{\partial}{\partial \underline{k}'}\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}-2\underline{k}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_h\cdot\hat{k}\right]$$

$$=-\frac{\omega}{8\pi}|\underline{E}|^2\frac{\partial}{\partial \underline{k}'}\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el} \tag{2.81}$$

Nello stesso tempo se prendiamo $k_y=0$, cosa che possiamo fare senza ledere in alcun modo la generalità, la (2.12) diventa $(E_y=0)$

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}=(\hat{k}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\hat{k})|\underline{E}|^2$$

$$=-\pi\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^2}\int\frac{d^3\bar{p}}{\gamma}\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]\left|E_x+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\parallel\bar{p}_\parallel E_z\right|^2J_n^2\delta\left(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)$$

per la presenza della delta di Dirac si ha $\frac{\omega}{n\omega_c}\gamma=1+\frac{\omega N_\parallel\bar{p}_\parallel}{n\omega_c}$ e inoltre $k_\perp E_z=k_\parallel E_x$ da cui $N_\perp E_z=N_\parallel E_x$ mentre $|E_x|^2=|E|^2(N_\perp/N)^2$ e pertanto

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}=-\pi\left(\frac{\omega}{\omega}p\right)^2\frac{1}{N_\perp^2}|E|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^3\bar{p}\ \gamma\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]J_n^2\delta\left(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)$$

Da ciò segue che il coefficiente di assorbimento spaziale (A.24') assume la forma

$$\alpha^{el}=\frac{\omega}{4\pi}\mathrm{Im}\ \varepsilon^{el}\frac{|\underline{E}|^2}{|\underline{S}|}$$

$$=-2\pi\left|\frac{\partial\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}'}\right|^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega}p\right)^2\frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^3\bar{p}\ \gamma\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]J_n^2\ \delta\left(y-N_\parallel\bar{p}_\parallel-\frac{n\omega_c}{\omega}\right) \tag{2.82}$$

Nel caso di propagazione perpendicolare si ha $N_\parallel=0$ e pertanto

$$\alpha^{el}(N_\parallel=0)=-2\pi\left|\frac{\partial\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}'}\right|^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega}p\right)^2\frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^3\bar{p}\ \gamma\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}J_n^2\ \delta\left(y-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)$$

$$=-2\pi\left|\frac{\partial\mathrm{Re}\ \varepsilon^{el}}{\partial\underline{k}'}\right|^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega}p\right)^2\frac{1}{N^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int d^3\bar{p}\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\bar{p}_\perp}J_n^2\ \delta\left(y-\frac{n\omega_c}{\omega}\right) \tag{2.83}$$

2.7 - Limite di plasma tenue

La frequenza di plasma (B.15) è direttamente proporzionale alla densità n_e delle particelle e pertanto la condizione di plasma tenue può essere formalmente espressa da

$$\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \ll 1 \tag{2.84}$$

Ciò implica che all'ordine più basso in $(\omega_p/\omega)^2$ l'indice di rifrazione si riduce a

$$N = 1 \tag{2.85}$$

che corrisponde al limite del vuoto.

Inoltre per il calcolo del tensore dielettrico è sufficiente valutare la polarizzazione dell'onda all'ordine più basso significativo in $(\omega_p/\omega)^2$, cioè nel limite del vuoto.

Procedendo in questo modo (Bornatici et al., 1983) dall'equazione d'onda (A.13') e per frequenze prossime a quella ciclotronica o ad una sua armonica, cioè per $n \to \omega_c/\omega$ si ottiene che

$$\frac{E_x}{E_y} = i\left[\frac{\sin^2\theta}{2n} \pm \left[\frac{\sin^4\theta}{2n^2} + \cos^2\theta\right]^{1/2}\right] \tag{2.86}$$

$$\frac{E_x}{E_z} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \tag{2.86'}$$

dove $N_\parallel = \cos\theta$ e $N_\perp = \sin\theta$ con $\theta \equiv (\underline{k}, \underline{B}_0)$. Il segno superiore in (2.86) si riferisce al modo ordinario mentre quello inferiore al modo straordinario.

Con riferimento alla (2.11), posto

$$R \equiv \left| \left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_\parallel E_z\right] J_n + i\frac{a}{n} J_{n+1} E_y \right|^2 \tag{2.87}$$

ricordando che

$$J_{n+1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_n'(z)$$

si ha

$$R = \left|\left[E_x + \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_\parallel E_z\right] J_n - i \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_\perp E_y J_n'\right|^2$$

$$= \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2 \left|\left[-\frac{n\omega_c}{\omega} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + N_\perp \bar{p}_\parallel\right] E_z J_n - i N_\perp \bar{p}_\perp E_y J_n'\right|^2$$

ove la seconda uguaglianza è ottenuta usando la (2.86')

Utilizzando la condizione di risonanza ciclotronica

$$\frac{n\omega_c}{\omega} = \gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel = \gamma - \bar{p}_\parallel \cos\theta$$

si ha

$$R = \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2 \left|-\gamma\left(\frac{\cos\theta - \bar{p}_\parallel/\gamma}{\sin\theta}\right] E_z J_n - i\bar{p}_\perp \sin\theta \, E_y J_n' \right|^2$$

$$= \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2 \gamma^2 \left|\left(\frac{\cos\theta - \bar{p}_\parallel/\gamma}{\sin\theta}\right] J_n + \frac{iE_y}{E_z} \frac{\bar{p}_\perp \sin\theta}{\gamma} J_n'\right|^2 |E_z|^2$$

Inoltre (Bornatici et al., 1983) nel limite di plasma tenue e per $n \to \omega_c/\omega$ il vettore di Poynting è

$$\underline{P} = \frac{2\left[\sin^4\theta + 4n^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}{\left[\sin^4\theta + 4n^2\cos^2\theta\right]^{1/2} \mp \sin^2\theta} \, c \frac{|E_y|^2}{4\pi} \hat{k} \qquad (2.88)$$

mentre il flusso di energia di sloshing è nullo all'ordine più basso in $(\omega_c/\omega)^2$.

In base a questi risultati si ha che

$$\left[\frac{c}{4\pi} \frac{R}{|\underline{P}|}\right]^{\mp} = \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2 \gamma^2 (\mp) \frac{\sin\theta\cos\theta}{2\left[\frac{\sin^4\theta}{4n^2} + \cos^2\theta\right]^{1/2}} \frac{1}{(iE_y)^* E_z} \left\{\left(\frac{\cos\theta - \bar{p}_\parallel/\gamma}{\sin\theta}\right]^2 J_n^2 |E_z|^2 + \right.$$

$$\left. + |E_y|^2 \left[\frac{\sin\theta}{\gamma}\right]^2 \left[\bar{p}_\perp J_n'\right]^2 + 2iE_y E_z^* \left(\frac{\cos\theta - \bar{p}_\parallel/\gamma}{\sin\theta}\right] \frac{\bar{p}_\perp \sin\theta}{\gamma} J_n J_n'\right\} \qquad (2.89)$$

Combinando fra loro le (2.86) e (2.86') si ottiene che

$$\frac{iE_y}{E_x} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta\left[\dfrac{\sin^2\theta}{2n} \pm \left[\dfrac{\sin^4\theta}{4n^2}+\cos^2\theta\right]^{1/2}\right]} = \frac{\dfrac{\sin^2\theta}{2n} \mp \left[\dfrac{\sin^4\theta}{4n^2}+\cos^2\theta\right]^{1/2}}{\sin\theta\cos\theta} \tag{2.90}$$

e inoltre $|E_y|^2 = iE_y(-iE_y^*)$ quindi si ha

$$\left[\frac{c}{4\pi}\frac{R}{|\underline{P}|}\right]^{\mp} = \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2 \gamma^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\left\{\frac{(\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma)^2}{\sin\theta\cos\theta}J_n^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left[\frac{\bar{p}_\perp J'_n}{\gamma}\right]^2 \mp \frac{1}{\left[\dfrac{\sin^4\theta}{4n^2}+\cos^2\theta\right]^{1/2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\frac{1}{2n}(\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma)J_n^2 + \frac{\sin^3\theta}{2n\cos\theta}\left[\frac{\bar{p}_\perp}{\gamma}J'_n\right]^2 2\frac{\bar{p}_\perp}{\gamma}(\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma)J_n J'_n\right]\right\} \tag{2.91}$$

Questa espressione è costituita da due parti: la prima indipendente dalla polarizzazione dell'onda e la seconda che cambia segno per onda ordinaria e straordinaria rispettivamente. Se sommiamo i contributi dell'onda ordinaria e di quella straordinaria ottenendo l'effetto globale dei due modi di propagazione, il termine dipendente dalla polarizzazione si annulla e si ha

$$\frac{c}{4\pi}\left[\left[\frac{R}{|\underline{P}|}\right]^- + \left[\frac{R}{|\underline{P}|}\right]^+\right] \equiv \left[\frac{c}{4\pi}\frac{R}{|\underline{P}|}\right]^{tot} = \left[\frac{\omega}{n\omega_c}\right]^2\gamma^2\left\{(\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma)^2 J_n^2 + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}(\bar{p}_\perp J'_n)^2\right\} \tag{2.92}$$

Si può a questo punto scrivere (utilizzando la (2.11)) il coefficiente di assorbimento spaziale totale (A.24') nel limite di plasma tenue nella forma

$$\alpha^{(tot)} = -\pi\frac{\omega_p^2}{c\omega}\frac{1}{N_\perp^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int d^3\bar{p}\ \gamma\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial f_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]\left\{(\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma)^2J_n^2 + \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}(\bar{p}_\perp J'_n)^2\right\}\right.$$

$$\left.\delta\left(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)\right]$$

$$= -\pi\frac{\omega_p^2}{c\omega}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int d^3\bar{p}\ \gamma\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\partial f_0}{\partial\bar{p}_\perp}+\cos\theta\frac{\partial f_0}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]\left\{\left[\frac{\cos\theta-\bar{p}_\parallel/\gamma}{\sin\theta}\right]^2J_n^2 + \frac{1}{\gamma^2}(\bar{p}_\perp J'_n)^2\right\}\right.$$

$$\left.\delta\left(\gamma-\bar{p}_\parallel\cos\theta-\frac{n\omega_c}{\omega}\right)\right] \tag{2.93}$$

Cap. 3

Assorbimento per una funzione di distribuzione di tipo "beam"

Fino ad ora abbiamo considerato il coefficiente di assorbimento spaziale per i diversi modi di propagazione delle onde elettromagnetiche in un plasma con una funzione di distribuzione arbitraria.

Vi sono però funzioni di distribuzione specifiche particolarmente interessanti perchè si realizzano in numerose situazioni sperimentali ed è pertanto opportuno vederne in dettaglio il relativo comportamento per quanto riguarda il coefficiente di assorbimento.

In generale l'analisi teorica ha riguardato principalmente funzioni di distribuzione di tipo Maxwelliano (Bornatici et al., 1983). Tuttavia nei plasmi intensamente riscaldati per mezzo dell' "Electron Cyclotron Heating" vengono prodotti di frequente elettroni sovratermici caratterizzati da funzioni di distribuzione altamente anisotrope.

Analogamente nei dispositivi per la generazione di onde elettromagnetiche ad alta frequenza tipo Gyrotron e Free Electron Laser vengono usati intensi fasci di elettroni relativistici.

La struttura di tali fasci può essere in molti casi adeguatamente rappresentata mediante la cosiddetta "beam like distribution"

$$\bar{f}_{o} = c_{\perp}\, e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{2})^{1/2}}\, \delta(\bar{p}_{\parallel}-\bar{p}_{\parallel o}) \qquad (3.1)$$

dove $c_{\perp}$ è un coefficiente di normalizzazione mentre $\mu_{\perp}=mc^2/T_{\perp}$

Tale funzione di distribuzione rappresenta un fascio mono-energetico nella direzione del campo magnetico, con momento delle particelle $\bar{p}_{\parallel o}$, mentre in direzione perpendicolare l'esponenziale distribuzione di tipo Maxwelliano la cui larghezza è data dalla temperatura perpendicolare, $T_{\perp}$.

Il coefficiente di normalizzazione in (3.1) è determinato dalla condizione che

$$\int \bar{f}_{o}\, d^3\bar{p} = 1$$

e poichè

$$\int \bar{f}_{o} d^3\bar{p} = 2\pi c_{\perp}\int e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{2})^{1/2}}\delta(\bar{p}_{\parallel}-\bar{p}_{\parallel o})\bar{p}_{\perp}d\bar{p}_{\perp}d\bar{p}_{\parallel} = 2\pi c_{\perp}\int_{o}^{\infty} \bar{p}_{\perp}e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{2})^{1/2}} d\bar{p}_{\perp}$$

$$= 2\pi\, c_{\perp}\, e^{-\mu_{\perp}}\, \frac{\mu_{\perp}+1}{\mu_{\perp}^{2}}$$

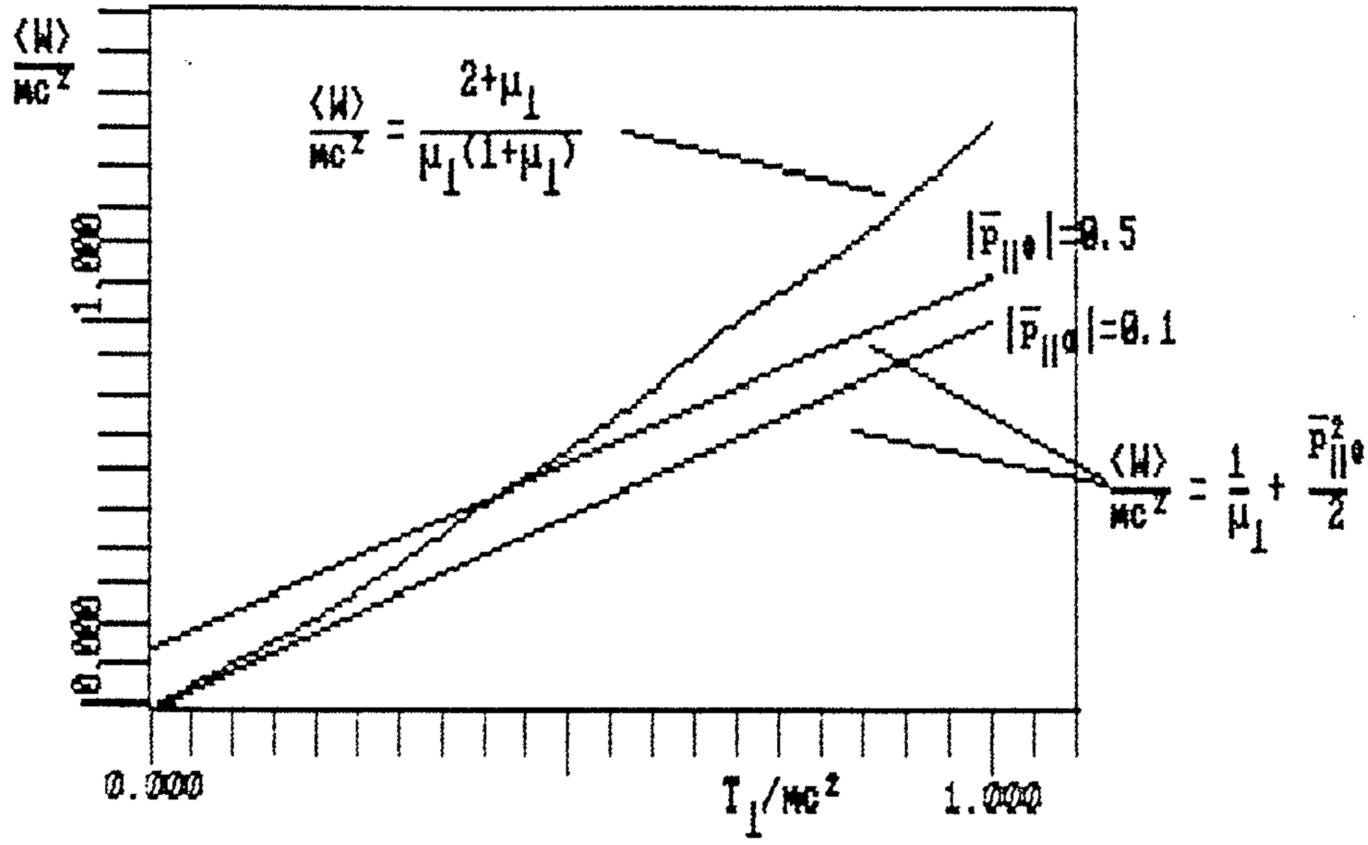
si ha

$$c_{\perp} = \frac{\mu_{\perp}^{2}\, e^{\mu_{\perp}}}{2\pi(\mu_{\perp}+1)} \qquad (3.2)$$

3.1 - <u>Energia cinetica media del fascio</u>

E' interessante calcolare l'energia cinetica media corrispondente alla

Fig 3.1



Energia cinetica media in funzione della temperatura perpendicolare degli elettroni per una distribuzione di tipo "beam".

funzione di distribuzione (3.1), cioè

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = 2\pi\int \bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel(\gamma-1)\bar{f}_0$$

$$=2\pi c_\perp\int \bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel\left[\sqrt{1+\bar{p}_\perp^2+\bar{p}_\parallel^2}-1\right]e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_{\parallel 0})$$

$$=2\pi m c_\perp\int_0^\infty \bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp\left[\sqrt{1+\bar{p}_\perp^2+\bar{p}_{\parallel 0}^2}-1\right]e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} \tag{3.3}$$

Nel caso limite di $\bar{p}_{\parallel 0}=0$, cioè la distribuzione è una "Maxwelliana bi-dimensionale" nella direzione perpendicolare, è $\gamma^2=1+\bar{p}_\perp^2$ da cui $\bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp=\gamma d\gamma$ e pertanto

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = 2\pi c_\perp\int_1^\infty \gamma d\gamma(\gamma-1)e^{-\mu_\perp\gamma} = \frac{2\pi}{\mu_\perp}c_\perp\left[\frac{2}{\mu_\perp^2}+\frac{1}{\mu_\perp}\right]e^{-\mu_\perp}$$

$$=\frac{2+\mu_\perp}{\mu_\perp(1+\mu_\perp)} \tag{3.4}$$

Si ha pertanto solo una dipendenza dalla temperatura perpendicolare degli elettroni, che diventa una proporzionalità diretta per temperature sufficientemente alte (cfr. Fig. 3.1).

Più complesso è il caso di $\bar{p}_{\parallel 0}\neq 0$, per il quale si trova una espressione analitica semplice solamente nel limite debolmente relativistico, per cui

$$\gamma = 1+\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2 \quad \text{e} \quad \mu_\perp\gg 1 \tag{3.5}$$

In tale situazione infatti

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = 2\pi c_\perp\int_0^\infty \bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp\left[\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2+\frac{1}{2}\bar{p}_{\parallel 0}^2\right]e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2/2)^{1/2}}$$

$$=\pi c_\perp\frac{e^{-\mu_\perp}}{\mu_\perp}\left[\bar{p}_{\parallel 0}^2+\frac{2}{\mu_\perp}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{2+\mu_\perp\bar{p}_{\parallel 0}^2}{\mu_\perp+1}\simeq\frac{1}{\mu_\perp}+\frac{\bar{p}_{\parallel 0}^2}{2} \tag{3.6}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\mu_\perp\gg 1$.

Come ci si poteva aspettare l'energia cinetica media è determinata dalla energia termica $\frac{1}{\mu_\perp}$ e da quella cinetica $\frac{\bar{p}^2_{\parallel 0}}{2}$.

Ovviamente per $\bar{p}_{\parallel 0}=0$ si ottiene il limite debolmente relativistico della (3.4) (cfr. Fig 3.1).

3.2 - Forma generale del coefficiente di assorbimento spaziale

Per calcolare il coefficiente di assorbimento spaziale per una beam like distribution del tipo (3.1) per propagazione arbitraria, facciamo uso della (2.12).

Il problema si riduce alla risoluzione di due integrali:

$$I^b_\perp \equiv 2\pi\int \frac{d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\,\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp}\left|\left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp \bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a) + i\,\frac{\omega\, N_\perp \bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2 \cdot$$
$$\cdot\,\delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) \qquad (3.7)$$

$$I^b_\parallel \equiv 2\pi\int \frac{\bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\,N_\parallel\,\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\left|\left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp \bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a) + i\,\frac{\omega\, N_\perp \bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2 \cdot$$
$$\cdot\,\delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) \qquad (3.8)$$

dove è importante ricordare che $a \equiv \bar{\omega}\, N_\perp \bar{p}_\perp$ e pertanto è funzione di $\bar{p}_\perp$.

Tali integrali contengono rispettivamente la derivata della funzione di distribuzione rispetto a $\bar{p}_\perp$ e a $\bar{p}_\parallel$: in particolare in quest'ultimo caso bisogna porre attenzione al fatto che questo implica una derivata della funzione delta di Dirac.

Per poter fare uso della condizione di risonanza ciclotronica contenuta in

$$\delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega) \qquad (3.9)$$

osserviamo che vale la seguente proprietà generale:

$$\delta\left[\varphi(x)\right] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(x^i)|}\,\delta(x-x^i) \qquad (3.10)$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione monodroma e x^i l'i-esina radice di $\varphi(x)=0$.

Utilizziamo la (3.5) per eseguire l'integrazione rispetto a $\bar{p}_\perp$ e pertanto si ha

$$\varphi(\bar{p}_\perp) = \sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2} - (N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega) \qquad (3.11)$$

le cui radici si determinano imponendo

$$\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2} = (N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega)$$

il che implica la condizione:

$$N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega \geq 1 \qquad (3.12)$$

Da ciò segue che si hanno le due radici

$$\bar{p}_\perp^{\pm} = \pm\sqrt{(N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega)^2 - 1 - \bar{p}_\parallel^2}$$

delle quali però solamente la positiva è accettabile poichè deve essere $\bar{p}_\perp \geq 0$ e pertanto si ha la sola radice

$$\bar{p}_\perp^{+} = +\sqrt{(N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega)^2 - 1 - \bar{p}_\parallel^2} \qquad (3.13)$$

Poichè il radicando deve essere positivo o nullo si impone anche la condizione

$$(N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega)^2 - 1 - \bar{p}_\parallel^2 \geq 0 \qquad (3.14)$$

Tale condizione, fissati n e ω per un dato $N_\parallel$, determina l'intervallo dei valori possibili di $\bar{p}_\parallel$: si ha infatti

$$\frac{N_{\parallel}\frac{n\omega_c}{\omega} - \sqrt{(n\omega_c/\omega)^2 - (1-N_{\parallel}^2)}}{1 - N_{\parallel}^2} \le \bar{p}_{\parallel} \le \frac{N_{\parallel}\frac{n\omega_c}{\omega} + \sqrt{(n\omega_c/\omega)^2 - (1-N_{\parallel}^2)}}{1 - N_{\parallel}^2} \qquad (3.15)$$

Indichiamo per brevità con $\bar{p}_{\parallel(min)}$ e $\bar{p}_{\parallel(max)}$ rispettivamente l'estremo inferiore e quello superiore dell'intervallo (3.15).

Nello stesso tempo per la condizione di risonanza ciclotronica si ha

$$\varphi'(\bar{p}_\perp) = \frac{\bar{p}_\perp}{\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2}} = \frac{\bar{p}_\perp}{N_\parallel \bar{p}_\parallel + n\omega_c/\omega}$$

e pertanto

$$\delta\left[\varphi(\bar{p}_\perp)\right] = \left|\frac{\gamma^+}{\bar{p}_\perp^+}\right| \delta(\bar{p}_\perp - \bar{p}_\perp^+) \qquad (3.15')$$

dove si è posto $\gamma^+ \equiv \sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^{+2}}$.

Consideriamo il primo dei due integrali. Si ha, utilizzando la funzione δ in $\bar{F}_0$ per l'integrazione rispetto a $\bar{p}_\parallel$

$$I_\perp^b = 2\pi \frac{n\omega_c}{\omega} \int \frac{d\bar{p}_\perp}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\perp} \left[c_\perp e^{-\mu(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}\right] \left|\left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_{\parallel 0} E_z\right] J_n(a) + i \frac{\omega N_\perp \bar{p}_\perp}{n\omega_c} J_{n+1}(a) E_y\right|^2 \cdot$$

$$\cdot \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_{\parallel 0} - n\omega_c/\omega)$$

dove ovviamente $\bar{p}_{\parallel 0}$ deve soddisfare la (3.15)

Utilizzando ora la (3.10), per la (3.13) e sviluppando i calcoli, si ha

$$I_\perp^b = -2\pi \frac{n\omega_c}{\omega} \int \frac{d\bar{p}_\perp}{\gamma} \mu_\perp c_\perp \frac{\bar{p}_\perp}{\sqrt{1+\bar{p}_\perp^2}} e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} \left|\left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_\parallel E_z\right] J_n(a) + i \frac{\omega N_\perp \bar{p}_\perp}{n\omega_c} J_{n+1}(a) E_y\right|^2 \cdot$$

$$\cdot \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - n\omega_c/\omega)$$

$$= -2\pi \frac{n\omega_c}{\omega} \frac{\mu_\perp c_\perp e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}}{\sqrt{(N_\parallel \bar{p}_{\parallel 0} + n\omega_c/\omega)^2 - \bar{p}_{\parallel 0}^2}} \left|\left[E_x - iE_y + \frac{\omega}{n\omega_c} N_\perp \bar{p}_{\parallel 0} E_z\right] J_n(a^+) + i \frac{\omega N_\perp \bar{p}_\perp^+}{n\omega_c} J_{n+1}(a^+) E_y\right|^2 \qquad (3.16)$$

dove $a^+ \equiv \omega N_\perp \bar{p}_\perp^+/\omega_c$. Osserviamo che la radice al denominatore non può dare luogo a singolarità per la condizione (3.14).

Analogamente per il secondo integrale si ha:

$$I_{\parallel}^{b}=2\pi N_{\parallel}\int \frac{\bar{p}_{\perp}d\bar{p}_{\perp}d\bar{p}_{\parallel}}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_{\parallel}}\left[c_{\perp}e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{2})^{1/2}}\delta(\bar{p}_{\parallel}-\bar{p}_{\parallel *})\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\parallel}E_z\right]J_n(a)\right.$$

$$\left.+i\frac{\omega}{n\omega_c}\frac{N_{\perp}\bar{p}}{}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\delta(\gamma-N_{\parallel}\bar{p}_{\parallel}-n\omega_c/\omega)$$

utilizzando la condizione di risonanza ciclotronica per l'integrazione su $\bar{p}_{\perp}$ e ricordando la (3.15) si ha

$$I_{\parallel}^{b}=2\pi N_{\parallel}\int_{\bar{p}_{\parallel(min)}}^{\bar{p}_{\parallel(max)}} d\bar{p}_{\parallel}\qquad c_{\perp}e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{+2})^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_{\parallel}}\left[\delta(\bar{p}_{\parallel}-\bar{p}_{\parallel *})\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\parallel}E_z\right]J_n(a^+)\right.$$

$$\left.+i\frac{\omega}{n\omega}\frac{N_{\perp}}{}J_{n+1}(a^+)E_y\right|^2$$

Integrando per parti e facendo uso della $\delta(\bar{p}_{\parallel}-\bar{p}_{\parallel *})$ si ottiene

$$I_{\parallel}^{b}=-2\pi\; N_{\parallel}c_{\perp}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_{\parallel}}\left[e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{+2})^{1/2}}\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\parallel}E_z\right]J_n(a^+)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+i\frac{\omega}{n\omega_c}\frac{N_{\perp}\bar{p}_{\perp}}{}J_{n+1}(a^+)E_y\right|^2\right]\right\}_{\bar{p}_{\parallel}=\bar{p}_{\parallel *}}\qquad (3.17)$$

dove si è supposto $\bar{p}_{\parallel *}\neq\bar{p}_{\parallel(max)}$ e da $\bar{p}_{\parallel(min)}$ in modo che sia nullo il primo termine dell'integrazione (in caso contrario è sufficiente aggiungere il termine relativo all'estremo dell'intervallo di integrazione coincidente con $\bar{p}_{\parallel *}$).

Non è conveniente sviluppare la derivata inquanto la sua struttura è piuttosto complessa (ricordiamo che $\bar{p}_{\perp}^{+}$ dipende ora da $\bar{p}_{\parallel}$ secondo (3.13)) e pertanto la (2.12) assume la forma

$$\underline{E}^{*}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}=-\pi\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_{\perp}^2}\sum_n\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\left[I_{\perp}^{b}+I_{\parallel}^{b}\right]\qquad (3.18)$$

che è un risultato generale.

Consideriamo ora i limiti di propagazione perpendicolare e parallela.

3.3 - Propagazione perpendicolare ($N_{\parallel}=0$)

Nel caso di propagazione perpendicolare al campo magnetico l'indice di rifrazione nella direzione ad esso parallela deve essere nullo e pertanto i due integrali (3.16) e (3.17) si riducono alla forma

$$I_{\perp}^{b}(N_{\parallel}=0)=-2\pi\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\mu_{\perp}c_{\perp}e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{+2})^{1/2}}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel 0}^2}}\,\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\parallel 0}E_z\right]J_n(a^+)+i\,\frac{\omega\,N_{\perp}\bar{p}_{\perp}^{+}}{n\omega_c}J_{n+1}(a^+)E_y\right|^2 \tag{3.19}$$

$$I_{\parallel}^{b}(N_{\parallel}=0)=0 \tag{3.20}$$

poichè $I_{\parallel}$ risulta proporzionale a $N_{\parallel}$.

Inoltre dalla (3.13) segue che

$$\bar{p}_{\perp}^{+}=\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_{\parallel 0}^2} \tag{3.21}$$

Per propagazione perpendicolare i due automodi, l'onda ordinaria e l'onda straordinaria, sono disaccoppiati.

a) Onda ordinaria $\rightarrow E_x=E_y=0$; $N_{\perp}^2=\varepsilon_{zz}$

Questa è un'onda trasversa polarizzata linearmente e da (3.18)-(3.20) si ha

$$\underline{E}^{*}\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} = 2\pi^2\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_n \frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\mu_{\perp}c_{\perp}e^{-\mu_{\perp}(1+\bar{p}_{\perp}^{+2})^{1/2}}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel 0}^2}}\,\bar{p}_{\parallel 0}^2|E|^2J_n^2(\omega N_{\perp}\bar{p}_{\perp}^{+}/\omega_c)$$

Nello stesso tempo per la (2.37)

$$\underline{S}^{(o)}=N_{\perp}^{(o)}c\frac{|E|^2}{4\pi}\hat{k}$$

e quindi il coefficiente di assorbimento spaziale per onda ordinaria vale, per la ennesima armonica con $n\geq 1$

$$\alpha_n^{(o)}(N_\parallel=0)=\frac{\omega'}{4\pi}\frac{\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}}{|S^{(o)}|}=\frac{2\pi^2}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\mu_\perp c_\perp e^{-\mu_\perp(1+\overline{p}_\perp^{+2})^{1/2}}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\overline{p}_{\parallel 0}^2}}\overline{p}_{\parallel 0}^2\, J_n^2(\omega N_\perp\overline{p}_\perp^{+}/\omega_c)$$

o, esplicitando il coefficiente di normalizzazione (3.2),

$$\alpha_n^{(o)}(N_\parallel=0)=\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}\frac{\mu_\perp^3}{\mu_\perp+1}\frac{e^{-\mu_\perp(1+\overline{p}_\perp^{+2})^{1/2}+\mu_\perp}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\overline{p}_{\parallel 0}^2}}\overline{p}_{\parallel 0}^2\, J_n^2(\omega N_\perp\overline{p}_\perp^{+}/\omega_c) \qquad (3.22)$$

con $(n\omega_c/\omega)^2-\overline{p}_{\parallel 0}^2\geq 1$

Questa espressione è sempre positiva o tutt'al più nulla e pertanto non si manifestano instabilità (per instabilità si intende una situazione in cui il coefficiente di assorbimento risulta negativo).

Il risultato (3.22) poteva essere facilmente ottenuto anche a partire dalla (2.38') e anzi per gli altri casi otterremo l'espressione del coefficiente di assorbimento proprio a partire dalla relativa espressione già ricavata per una funzione di distribuzione arbitraria.

Nel caso limite in cui $\overline{p}_{\parallel 0}=0$, che corrisponde ad una distribuzione "Maxwelliana bi-dimensionale" in direzione perpendicolare al campo magnetico, poichè $\overline{f}_0=\delta(\overline{p}_\parallel)$ e $\alpha_n^{(o)}(N_\parallel=0)\propto\overline{p}_\parallel^2$, si ha

$$\alpha_n^{(o)}=0 \qquad (3.23)$$

inquanto è proporzionale a $\overline{p}_{\parallel 0}^2$.

Quest'ultimo risultato, come pure gli altri relativi al caso $\bar{p}_{\parallel *}=0$, costituisce una buona verifica di quanto ottenuto nel presente capitolo poichè in completo accordo con quanto già ricavato da Bornatici (Bornatici and Ruffina, 1985).

b) <u>onda straordinaria</u> $\rightarrow E_z=0$; $N_\perp^2 = \varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2/\varepsilon_{xx}$

Nel caso dell'onda straordinaria per propagazione perpendicolare usiamo direttamente la (2.46) e pertanto si ha

$$\alpha_n^{(x)}(N_\parallel=0)=-2\pi^2\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\int d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel\,\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\perp e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_{\parallel *})\right]$$
$$\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n(a)+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega)$$
$$=2\pi^2\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\int d\bar{p}_\perp\frac{c_\perp\mu_\perp\bar{p}_\perp}{(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n(a)+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega)$$

Utilizziamo ora la condizione di risonanza ciclotronica

$$\alpha_n^{(o)}(N_\parallel=0)=\frac{2\pi^2}{c}\omega\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{c_\perp\mu_\perp}{(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}\gamma^+e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n(a^+)+i\frac{a^+}{n}J_n'(a^+)\right|^2 \quad (3.24)$$

dove γ^+è il valore assunto da γ per $\bar{p}_\perp=\bar{p}_\perp^+$ e $\bar{p}_\parallel=\bar{p}_{\parallel *}$. Si noti che $\alpha_n^{(o)}(N_\parallel=0)\geq 0$, cioè, come già nel caso del modo o, anche il modo x è stabile.

Per l'onda straordinaria e per frequenze vicine alle armoniche con $n\geq 2$ è rilevante il limite di plasma freddo per il quale (cfr. (2.68))

$$\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} = i\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega}\,\frac{1}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2} \equiv iA(\omega) \quad (3.25)$$

In tal caso si ha

$$\alpha_n^{(x)}=2\pi^2\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{c_\perp\mu_\perp}{(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}\gamma^+e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}\left|A(\omega)J_n(a^+)+\frac{a^+}{n}J_n'(a^+)\right|^2$$

$$=\pi\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\gamma^+\frac{\mu_\perp^3e^{\mu_\perp}}{1+\mu_\perp}\frac{\gamma^+e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}}{(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}}\left|A(\omega)J_n(a^+)+\frac{a^+}{n}J_n'(a^+)\right|^2 \quad (3.26)$$

In particolare nel limite in cui $\bar{p}_{\parallel 0}=0$ si trova

$$\alpha_n^{(x)}=\pi\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{\mu_\perp^3}{\mu_\perp+1}e^{-\mu_\perp(n\omega_c/\omega-1)}\left|A(\omega)J_n(a^+)+\frac{a^+}{n}J_n'(a^+)\right|^2 \quad (3.27)$$

dove $a^+=\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\left[\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]-1\right]^{1/2}$.

Ricordiamo che i risultati (3.26) e (3.27) sono validi per $n\geq 2$.

Il risultato (3.27) coincide con quello ottenuto da Bornatici and Ruffina (1985).

3.4 - Propagazione parallela: $N_\perp=0$

Nel caso di onde che si propaghino parallelamente al campo magnetico si possono verificare tre diverse situazioni

a) onde longitudinali (L) $\Rightarrow \varepsilon_{zz}=0$

In questo caso vale la (2.55) alla quale contribuisce la sola armonica di ordine 0 e pertanto

$$\alpha^{(L)}_{(N_\perp=0)}=-4\pi^2c_\perp\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial\underline{k}'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\int\bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel\bar{p}_\parallel\frac{\partial}{\partial\bar{p}}\left[e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}}\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_{\parallel 0})\right]\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel)$$

utilizziamo nel solito modo la condizione di risonanza ciclotronica per l'integrazione su $\bar{p}_\perp$, non senza prima aver osservato che deve essere $N_\parallel \bar{p}_\parallel \geq 1$ affinchè si possa avere risonanza

$$\alpha^{(L)}_{(N_\perp=0)} = -4\pi^2 c_\perp \left|\frac{\partial \varepsilon_{h,zz}}{\partial \underline{k}'}\right|^{-1} \left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \int d\bar{p}_\parallel \bar{p}_\parallel \gamma^+ e^{-\mu_\perp (1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\parallel} \left[\delta(\bar{p}_\parallel - \bar{p}_{\parallel 0})\right]$$

e quindi integriamo per parti per utilizzare la seconda delta che abbiamo a disposizione

$$\alpha^{(L)}_{(N_\perp=0)} = 4\pi^2 c_\perp \left|\frac{\partial \varepsilon_{h,zz}}{\partial \underline{k}'}\right|^{-1} \left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{p}_\parallel}\left[e^{-\mu_\perp \sqrt{(N_\parallel^2-1)\bar{p}_\parallel^2}} (N_\parallel \bar{p}_\parallel^2)\right]\right\}_{\bar{p}_\parallel = \bar{p}_{\parallel 0}}$$

$$= 4\pi \left|\frac{\partial \varepsilon_{h,zz}}{\partial \underline{k}'}\right|^{-1} \left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \frac{\mu_\perp^2 e^{\mu_\perp}}{1+\mu_\perp} e^{-\mu_\perp \sqrt{(N_\parallel^2-1)\bar{p}_{\parallel 0}^2}} N_\parallel \bar{p}_{\parallel 0} \left[1 - \frac{\mu_\perp}{\sqrt{(N_\parallel^2-1)\bar{p}_{\parallel 0}^2}}\right] \qquad (3.28)$$

ove $N_\parallel \bar{p}_{\parallel 0} \geq 1$

Inoltre per $\bar{p}_{\parallel 0}=0$ si ha

$$\alpha^{(L)}_{(N_\perp=0)} = 0 \qquad (3.29)$$

cioè il coefficiente di assorbimento spaziale è nullo.

b) <u>Polarizzazione destrogira (RH)</u> $\rightarrow E_y = iE_x$

In questo caso vale la (2.61), alla quale contribuisce solamente la prima armonica, e pertanto

$$\alpha^{(RH)}_{(N_\perp=0)} = -\pi^2 \frac{\omega}{c} \frac{1}{N_\parallel} \left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \int \frac{\bar{p}_\perp^2 d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma} \left[\frac{1}{\bar{p}_\perp} \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} + N_\parallel \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\parallel}\right] \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - \omega_c/\omega) \qquad (3.30)$$

Calcoliamo separatamente i due integrali

$$I_\perp^{b(RH)} = \frac{\omega_c}{\omega} \int \frac{\bar{p}_\perp^2 d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\perp} \left[c_\perp e^{-\mu_\perp (1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} \delta(\bar{p}_\parallel - \bar{p}_{\parallel 0})\right] \delta(\gamma - N_\parallel \bar{p}_\parallel - \omega_c/\omega)$$

$$=-c_\perp \mu_\perp \frac{\omega_c}{\omega}\int \frac{\bar{p}_\perp^2 d\bar{p}_\perp}{\gamma}\frac{\bar{p}_\perp}{(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} \delta(\gamma-N_\parallel \bar{p}_\parallel-\omega_c/\omega)$$

se $\bar{p}_{\parallel(min)} \leq \bar{p}_{\parallel *} \leq \bar{p}_{\parallel(max)}$. Utilizziamo ora la condizione di risonanza ciclotronica, della quale comunque abbiamo tenuto conto per enunciare la precedente condizione

$$I_\perp^{b(RH)} = -\frac{\omega_c}{\omega} c_\perp \mu_\perp \frac{(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_{\parallel *}^2}{\sqrt{(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2}} e^{-\mu_\perp((N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2)^{1/2}} \quad (3.31)$$

Per il secondo integrale invece

$$I_\parallel^{b(RH)}\int \frac{\bar{p}_\perp^3}{\gamma} d\bar{p}_\parallel d\bar{p}_\perp N_\parallel c_\perp e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\parallel}\left[\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_{\parallel *})\right] \delta(\gamma-N_\parallel \bar{p}_\parallel-\omega_c-\omega)$$

$$=\int d\bar{p}_\parallel \, \bar{p}_\perp^{+2} N_\parallel c_\perp e^{-\mu_\perp(1+\bar{p}_\perp^{+2})^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\parallel}\left[\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_{\parallel *})\right]$$

integriamo per parti

$$I_\parallel^{b(RH)}=-N_\parallel c_\perp \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{p}_\parallel}\left[e^{-\mu_\perp((N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2)^{1/2}}\left[(N_\parallel \bar{p}_\parallel+\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_\parallel^2\right]\right]\right\}_{\bar{p}_\parallel=\bar{p}_{\parallel *}}$$

$$=-N_\parallel c_\perp e^{-\mu_\perp((N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2)^{1/2}} 2\Bigg[N_\parallel(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)-\bar{p}_{\parallel *}-$$

$$\frac{\mu_\parallel}{2}\frac{N_\parallel \; (N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\frac{\omega_c}{\omega})-\bar{p}_{\parallel *}}{\left[(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2\right]}\left[(N_\parallel \bar{p}_\parallel+\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_\parallel^2\right]\Bigg] \quad (3.32)$$

pertanto combinando queste due espressioni ed esplicitando $c_\perp$ si ottiene

$$\alpha^{(RH)}_{(N_\perp=0)}=\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{c}\frac{1}{N_\parallel}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]\frac{\mu_\perp^2}{\mu_\perp+1} e^{\mu_\perp} e^{-\mu_\perp((N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2)^{1/2}}\left[\frac{\omega_c}{\omega}\mu_\perp \frac{(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_{\parallel *}^2}{\sqrt{(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2}}+\right.$$

$$\left. N_\parallel\left[N_\parallel(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)-\bar{p}_{\parallel *}\right]\left[1-\frac{\mu_\parallel}{2\left[(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\parallel *}^2\right]}\left[(N_\parallel \bar{p}_{\parallel *}+\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}_{\parallel *}^2\right]\right]\right] \quad (3.33)$$

Infine nel limite in cui $\bar{p}_{\parallel *}=0$ si ha

$$\alpha^{(RH)}_{(N_\perp=0)}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{N_\parallel}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]\frac{\mu_\perp^2}{\mu_\perp+1}\,e^{-\mu_\perp(\omega_c/\omega-1)}\left[\mu_\perp\left[\frac{\omega_c^2}{\omega^2}-1\right]+N_\parallel^2\,\frac{\omega_c}{\omega}\,\left[1-\frac{\mu_\parallel}{2}\,\frac{\omega^2}{\omega_c}\left[\frac{\omega_c^2}{\omega^2}-1\right]\right]\right] \qquad (3.34)$$

c) <u>Polarizzazione levogira (LH)</u> $\Rightarrow E_y=-iE_x$

In questo caso, come già visto, il coefficiente di assorbimento spaziale è sempre nullo e pertanto

$$\alpha^{(LH)}_{(N_\perp=0)} = 0 \qquad (3.35)$$

Cap. 4

Assorbimento ed instabilità per una funzione di distribuzione di tipo "ring"

Un'altro tipo di funzione di distribuzione anisotropa di interesse pratico è la cosiddetta "ring like distribution"

$$\bar{f}_e = c_\parallel \, e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}} \frac{\delta(\bar{p}_\perp - \bar{p}_{\perp e})}{2\pi\bar{p}_{\perp e}} \qquad (4.1)$$

dove $c_\parallel$ è un coefficiente di normalizzazione, $\mu_\parallel = mc^2/T_\parallel$ e la presenza del denominatore $2\pi\bar{p}_{\perp e}$ è dovuta al fatto che $\delta(\bar{p}_\perp - \bar{p}_{\perp e})$ è una delta bidimensionale.

Tale funzione di distribuzione ha una struttura analoga alla "beam", tuttavia la componente Maxwelliana è quella parallela al campo magnetico mentre risulta costante e uguale a $\bar{p}_{\perp e}$ la componente della quantità di moto sul piano ad esso perpendicolare .

Anche in questo caso il coefficiente di normalizzazione si calcola imponendo

$$\int \bar{f}_e d^3\bar{p} = 1$$

e pertanto

$$\int \bar{f}_e d^3\bar{p} = \int c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}} \delta(\bar{p}_\perp - \bar{p}_{\perp e}) d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel = c_\parallel \int_0^\infty e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}} d\bar{p}_\parallel$$

mediante il cambiamento di variabile di integrazione $(1+\bar{p}_{\parallel}^2)^{1/2} \to x$

si ottiene $\displaystyle\int \bar{f}_{s} d^3\bar{p} = 2c_{\parallel} \int_1^{\infty} \frac{x\, e^{-\mu_{\perp} x}}{(x^2-1)^{1/2}} dx$

Ricordiamo ora che (Abramowitz and Stegun, 1972)

$$\int_u^{\infty} dx\; x(x^2-u^2)^{\nu-1}\, e^{-\mu x} = \frac{2^{\nu-1/2}}{\sqrt{\pi}}\, \mu^{1/2-\nu} u^{\nu+1/2}\, \Gamma(\nu)\; K_{\nu+1/2}(u\mu) \qquad (4.2)$$

con $K_{\nu+1/2}(u\mu)$ la funzione di Bessel modificata di seconda specie di ordine $\nu+1/2$.

Pertanto nel nostro caso, che corrisponde a $u=1$ e $\nu=1/2$, si ottiene

$$\int \bar{f}_{s} d^3\bar{p} = 2c_{\parallel} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) K_1(\mu_{\parallel}) = 2c_{\parallel} K_1(\mu_{\parallel}) \qquad (4.3)$$

Quindi il coefficiente di normalizzazione vale

$$c_{\parallel} = \frac{1}{2K_1(\mu_{\parallel})} \qquad (4.4)$$

4.1 - Energia cinetica media degli elettroni

Per quanto riguarda l'energia cinetica media corrispondente alla funzione di distribuzione di tipo "ring" (4.1) si ha

$$\frac{\langle W \rangle}{mc^2} = 2\pi \int \bar{p}_{\perp} d\bar{p}_{\perp} d\bar{p}_{\parallel} (\gamma-1) c_{\parallel} e^{-\mu_{\parallel}(1+\bar{p}_{\parallel}^2)^{1/2}} \frac{\delta(\bar{p}_{\perp}-\bar{p}_{\perp s})}{2\pi \bar{p}_{\perp s}}$$

$$= \frac{1}{2K_1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{1+\bar{p}_{\parallel}^2+\bar{p}_{\perp}^2} - 1\right] e^{-\mu_{\parallel}(1+\bar{p}_{\parallel}^2)^{1/2}} d\bar{p}_{\parallel} \qquad (4.5)$$

Nel caso particolare in cui $\bar{p}_{\perp s}=0$, procedendo come per la (3.32) si ha

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = \frac{1}{K_1}\int_0^\infty\left[\sqrt{1+\bar p_\parallel^2}\,-1\right]e^{-\mu_\parallel(1+\bar p_\parallel^2)^{1/2}}d\bar p_\parallel = \frac{1}{K_1}\int_1^\infty \gamma\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,e^{-\mu_\parallel\gamma}d\gamma$$

$$= \int_1^\infty \gamma\,\frac{\gamma-1}{\sqrt{g^2+1}}\,e^{-\mu_\parallel\gamma}d\gamma$$

per la (4.2) e poichè (Gradshteyn, 1980)

$$\int_1^\infty (x^2-1)^{\nu-1}e^{-\mu_\parallel x}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{\mu}\right]^{\nu-1/2}\Gamma(\nu)K_{\nu-1/2}$$

si ottiene infine

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = \frac{K_0(\mu_\parallel)}{K_1(\mu_\parallel)} + (1/\mu_\parallel-1) \qquad (4.6)$$

Nel limite debolmente relativistico per $\bar p_{\perp 0}\neq 0$ invece si ha (per la (3.33))

$$\frac{\langle W\rangle}{mc^2} = \frac{1}{2K_1}\int_0^\infty(\bar p_\parallel^2+\bar p_\perp^2)e^{-\mu_\parallel}e^{-\mu_\parallel\bar p_\parallel^2/2}d\bar p_\parallel = \frac{1}{2K_1}\,e^{-\mu_\parallel}\sqrt{\frac{\pi}{2\mu_\parallel}}\left[\bar p_{\perp 0}^2+\frac{1}{\mu_\parallel}\right] \qquad (4.7)$$

Si ha quindi una dipendenza quadratica da $\bar p_{\perp 0}$ (cfr. Fig. 4.1).

4.2 - forma generale del coefficiente di assorbimento spaziale

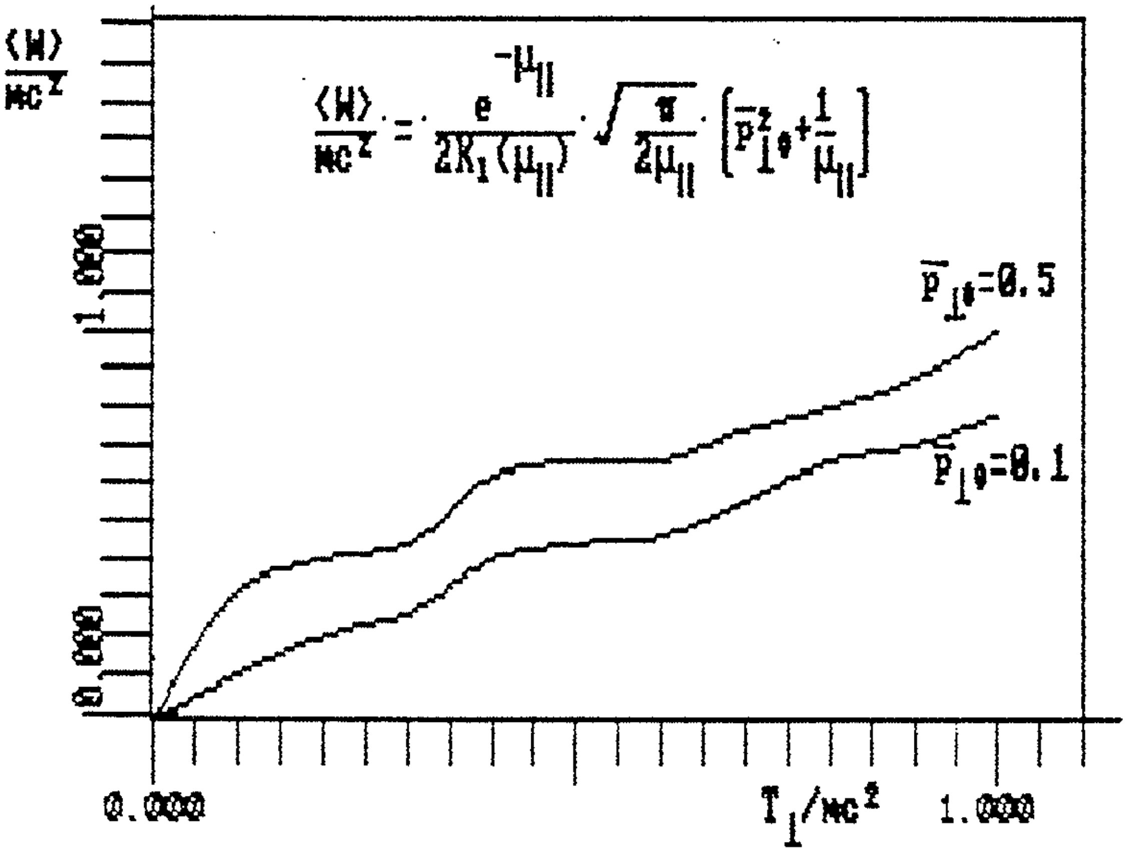
Per calcolare il coefficiente di assorbimento spaziale per una "ring like distribution" nel caso di propagazione qualunque, facciamo uso della (2.12).

Anche in questo caso il problema si riduce alla risoluzione degli integrali

$$I_\perp^r = 2\pi\int\frac{d\bar p_\perp d\bar p_\parallel}{\gamma}\,\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{\partial f_0}{\partial\bar p_\perp}\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar p_\parallel E_z\right]J_n(a)+\frac{i\omega N_\perp\bar p_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\cdot$$

$$\cdot\,\delta(\gamma-N_\parallel\bar p_\parallel-n\omega_c/\omega) \qquad (4.8)$$

Fig. 4.1



Energia cinetica media in funzione della temperatura parallela degli elettroni per una distribuzione di tipo "ring" (caso debolmente relativistico)

$$I^{r}_{\parallel} \equiv 2\pi\int \frac{d\bar{p}_{\perp}d\bar{p}_{\parallel}}{\gamma} \; \bar{p}_{\perp}N_{\parallel} \; \frac{\partial F_{0}}{\partial\bar{p}_{\parallel}}\left|\left[E_{x}-iE_{y}+\frac{\omega}{n\omega_{c}} \; N_{\perp}\bar{p}_{\parallel}E_{z}\right]J_{n}(a)+\frac{i\omega N_{\perp}\bar{p}_{\perp}}{n\omega_{c}} \; J_{n+1}(a)E_{y}\right|^{2}\cdot$$
$$\cdot\delta(\gamma-N_{\parallel}\bar{p}_{\parallel}-n\omega_{c}/\omega) \qquad (4.9)$$

analoghi agli integrali (3.7) (3.8).

Ora però la condizione di risonanza ciclotronica deve essere utilizzata per calcolare l'integrazione rispetto a $\bar{p}_{\parallel}$, inquanto per l'integrazione rispetto a $\bar{p}_{\perp}$ si può fare uso della $\delta(\bar{p}_{\perp}-\bar{p}_{\perp 0})$.

La (3.11) deve pertanto essere risolta rispetto a $\bar{p}_{\parallel}$ anzichè rispetto a $\bar{p}_{\perp}$: si ha cioè

$$\Psi(\bar{p}_{\parallel}) = \sqrt{1+\bar{p}_{\parallel}^{2}+\bar{p}_{\perp}^{2}} - (N_{\parallel}\bar{p}_{\parallel}+n\omega_{c}/\omega) \qquad (4.10)$$

che ha le due radici:

$$\bar{p}_{\parallel}^{\pm} = \frac{N_{\parallel}n\omega_{c}/\omega \pm \sqrt{(n\omega_{c}/\omega)^{2}-(1-N_{\parallel}^{2})(1+\bar{p}_{\perp}^{2})}}{1-N_{\parallel}^{2}} \qquad (4.11)$$

Poichè il radicando deve essere positivo, bisogna imporre la condizione che

$$(n\omega_{c}/\omega)^{2} \geq (1-N_{\parallel}^{2})(1+\bar{p}_{\perp}^{2}) \qquad (4.12)$$

Tale condizione, fissato $n\omega_{c}\omega$ e per un dato $N_{\parallel}$ limita l'intervallo dei valori possibili per $\bar{p}_{\perp}$, si ha infatti

$$-\sqrt{\frac{1}{1-N_{\parallel}^{2}}\,(n\omega_{c}/\omega)^{2}-1} \leq \bar{p}_{\perp} \leq \sqrt{\frac{1}{1-N_{\parallel}^{2}}\,(n\omega_{c}/\omega)^{2}-1}$$

ma nello stesso tempo deve essere $\bar{p}_{\parallel} \geq 0$ e pertanto

$$0 \leq \bar{p}_{\perp} \leq \sqrt{\frac{1}{1-N_{\parallel}^{2}}\,(n\omega_{c}/\omega)^{2}-1} \equiv \bar{p}_{\perp(max)} \qquad (4.13)$$

Per $\bar{p}_{\perp 0}$ fissato la (4.13) diventa una condizione sulla frequenza ω: deve infatti essere verificata la

$$\frac{\omega}{\omega_c} \leq \frac{n}{\sqrt{(\bar{p}_{\perp *}^2+1)(1-N_\parallel^2)}} \equiv \frac{\omega_n^*}{\omega_c} \tag{4.13'}$$

Inoltre

$$\varphi'(\bar{p}_\parallel) = \frac{\bar{p}_\parallel}{\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2}} - N_\parallel \tag{4.14}$$

e quindi l'analogo della (3.16) è la

$$\delta\left[\varphi(\bar{p}_\parallel)\right] = \frac{\gamma^+}{|\bar{p}_\parallel^+-\gamma^+N_\parallel|}\,\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^+) + \frac{\gamma^-}{|\bar{p}_\parallel^--\gamma^-N_\parallel|}\,\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^-) \tag{4.15}$$

dove si è posto $\gamma^\pm \equiv \sqrt{1+\bar{p}_\parallel^{\pm 2}+\bar{p}_\perp^{\,2}}$

Consideriamo ora il primo dei due integrali.

$$I_\perp^r=\frac{n\omega_c}{\omega}\int \frac{d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\;\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}\;N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)\;+\right.$$
$$\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n\omega_c/\omega)$$

dove ovviamente $\bar{p}_{\perp *}$ deve rispettare la (4.13).

Per la (4.15) si può scrivere

$$I_\perp^r=\frac{n\omega_c}{\omega}\sum_{l=\pm}\int_{-\infty}^{\infty}d\bar{p}_\parallel\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}d\bar{p}_\perp\;\frac{1}{\gamma}\;\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-\gamma^lN_\parallel|}\;\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

da cui, facendo uso della condizione di risonanza ciclotronica

$$I_\perp^r=\frac{n\omega_c}{\omega}\sum_{l=\pm}\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}d\bar{p}_\perp\frac{1}{|\bar{p}_\parallel^l-\gamma^lN_\parallel|}c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}\;N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)+\right.$$
$$\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2$$

integriamo ora per parti in modo da non dover calcolare la derivata della

$\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})$. A questo scopo osserviamo che se $0<\bar{p}_{\perp *}<\bar{p}_{\perp(max)}$ il termine non integrato dell' espressione che ne risulta è nullo e pertanto si può scrivere

$$I_\perp^r=-\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{1}{2K_1(\mu_\parallel)}\sum_{l=\pm}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}} \tag{4.16}$$

dove è conveniente lasciare indicata la derivata rispetto a $\bar{p}_\perp$.

In maniera analoga per l'integrale (4.5) si ha

$$I_\parallel^r=\int\frac{d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\,\bar{p}_\perp N_\parallel\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\parallel}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\,\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}\;N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)\;+\right.$$

$$\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-n\omega_c/\omega)$$

Applicando la (4.15) e sviluppando la derivata rispetto a $\bar{p}_\parallel$ si ottiene

$$I_\parallel^r=-\sum_{l=\pm}\int_0^{\bar{p}_\perp(max)}\bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\;\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\;N_\parallel c_\parallel\mu_\parallel\frac{\bar{p}_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}}{(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\;\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}\right.\right.$$

$$\left.\left.N_\perp\bar{p}_\parallel E_z\right]J_n(a)+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

e quindi in virtù delle due delta di Dirac

$$I_\parallel^r=-\sum_l\frac{N_\parallel c_\parallel\mu_\parallel}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\;\frac{\bar{p}_\parallel^l e^{-\mu_\parallel(1+1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}}{(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\;\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}_\parallel^l E_z\right]J_n(a)+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}}$$

e pertanto esplicitando il coefficiente di normalizzazione

$$I^r_\parallel=-\frac{1}{2K_1(\mu_\parallel)}\sum_l \frac{N_\parallel\mu_\parallel}{|\bar{p}^l_\parallel-N_\parallel\gamma^l|}\,\frac{\bar{p}^l_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+1+\bar{p}^{l\,2}_\parallel)^{1/2}}}{(1+\bar{p}^{l\,2}_\parallel)^{1/2}}\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}^l_\parallel E_z\right]J_n(a)+\right.$$

$$\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}} \tag{4.17}$$

Pertanto il coefficiente di assorbimento spaziale diventa:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{4\pi}\,\frac{\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}}{|\underline{S}(\underline{k}',\omega')|}=-\frac{\omega^2}{4}\,\frac{1}{|\underline{S}(\underline{k}',\omega')|}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp}\sum_n\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\left[I^r_\perp+I^r_\parallel\right] \tag{4.18}$$

Vediamo ora come si comporta il coefficiente di assorbimento spaziale per i già noti modi di propagazione che ci interessano.

4.3 - Propagazione perpendicolare ($N_\parallel=0$)

Per propagazione perpendicolare al campo magnetico, cioè per $N_\parallel=0$, i due integrali (4.16) e (4.17) diventano

$$I^r_\perp=-\frac{n\omega_c}{\omega}\,\frac{1}{2K_1(\mu_\parallel)}\sum_{l=\pm}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}^{l\,2}_\parallel)^{1/2}}}{|\bar{p}^l_\parallel|}\left|\left[E_x-iE_y+\frac{\omega}{n\omega_c}N_\perp\bar{p}^l_\parallel E_z\right]J_n(a)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{i\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}J_{n+1}(a)E_y\right|^2\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}} \tag{4.19}$$

$$I^r_\parallel = 0 \tag{4.20}$$

e inoltre (cfr. (4.7)) è

$$\bar{p}^l_\parallel = l\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-1-\bar{p}^2_\perp} \tag{4.21}$$

con le condizioni che

$$0 \le \bar{p}_\perp \le \sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-1} \equiv \bar{p}_{\perp(max)} \qquad n\omega_c/\omega \ge 1 \tag{4.22}$$

e con

$$\omega_n^* = n\omega_c/(\bar{p}_{\perp *}^2+1)^{1/2} \tag{4.22'}$$

In particolare per $\bar{p}_{\perp *}=0$ si ha $\omega_n^*=n\omega_c$.

Consideriamo separatamente onda ordinaria e straordinaria.

a) Onda ordinaria $\Rightarrow E_x=E_y=0;\ N_\perp^2=\epsilon_{zz}$

Per queste onde trasverse, linearmente polarizzate, vale la (2.38) e pertanto

$$\alpha_n^{(o)}=-\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\int \bar{p}_\parallel^2 d\bar{p}_\parallel c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}} d\bar{p}_\perp \frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right] J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\ \delta(\gamma-n\omega_c/\omega)$$

$$=-\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_l\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}} d\bar{p}_\perp\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{p}_\parallel c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\bar{p}_\parallel^2\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l|}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\ \delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

Utilizziamo la condizione di risonanza ciclotronica, per la quale $\gamma^2=n\omega_c/\omega$

$$\alpha_n^{(o)}=-\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}\sum_l\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}} d\bar{p}_\perp\ |\bar{p}_\parallel^l|c_\parallel e^{-\mu(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\ \frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)$$

notando che $\sum_l$ si riduce ad un fattore 2 integriamo per parti

$$\alpha_n^{(o)}=2\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}c_\parallel\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}\ J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}}$$

Consideriamo ora il fattore da derivare.

$$\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2)^{1/2}}\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}\ J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\right]$$

$$=\left[2\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}\;J_n'(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)-\frac{\bar{p}_\perp J_n(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}}+\right.$$

$$\left.+\mu_\parallel J_n(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\bar{p}_\perp\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2}}\right]J_n(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2)^{1/2}}$$

e pertanto si può scrivere

$$\alpha_n^{(o)}=2\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega c_\parallel}e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2)^{1/2}}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left[2\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}\;J_n'(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{p}_{\perp *}J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}+\mu_\parallel J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)\bar{p}_{\perp *}\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2}}\right]J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)$$

In conclusione

$$\alpha_n^{(o)}=\frac{1}{K_\perp}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2)^{1/2}}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left[2\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}\;J_n'(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{p}_{\perp *}J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}+\mu_\parallel J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)\bar{p}_{\perp *}\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2}}\right]J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c) \quad (4.23)$$

Nel limite in cui $\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c \ll 1$ possiamo sviluppare in serie le funzioni di Bessel per le quali al primo ordine si ha

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \qquad (4.24)$$

In questo modo

$$\alpha_n^{(o)}=\frac{1}{K_\perp}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2)^{1/2}}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\frac{1}{2^n n!}\left[2\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}\right.$$

$$\left.\frac{\partial(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^n}{\partial(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)}-\frac{\bar{p}_{\perp *}(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^n}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}+\mu_\parallel(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^n\bar{p}_{\perp *}\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp *}^2}}\right]\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^n}{2^n n!}$$

$$=\frac{1}{K_\perp}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\frac{n\omega_c}{\omega}e^{-\mu_\parallel((n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2)^{1/2}}\frac{1}{\bar{p}_{\perp e}}\frac{1}{2^n n!}\left[2\frac{\omega}{\omega_c}nN_\perp\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}\,(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp e}/\omega_c)^{n-1}\right.$$

$$\left.-\bar{p}_{\perp e}(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp e}/\omega_c)^n\left[\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}}-\mu_\parallel\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2}}\right]\right]\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp e}/\omega_c)^n}{2^n n!} \quad (4.26)$$

da cui si vede che

$$\alpha_n^{(o)} \sim (\bar{p}_{\perp e})^{n-1} \quad (4.26)$$

In particolare per la prima armonica n=1, per la quale l'assorbimento è dominante, si ha

$$\alpha_1^{(o)}=\frac{\pi}{2K_\perp N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 e^{-\mu_\parallel((\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2)^{1/2}}\frac{1}{\bar{p}_{\perp e}}\frac{\omega_c}{\omega}\left[2\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\sqrt{(\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}\right.$$

$$\left.-\omega N_\perp\bar{p}_{\perp e}^2/\omega_c\left[\frac{1}{\sqrt{(\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}}-\mu_\parallel\frac{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2-1}}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_{\perp e}^2}}\right]\right](\omega N_\perp\bar{p}_{\perp e}/\omega_c) \quad (4.27)$$

e quindi per $\bar{p}_{\perp e} \ll 1$ o al limite 0 si ha

$$\alpha_1^{(o)}=\pi\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 c_\parallel e^{-\mu_\parallel(\omega_c/\omega)}\sqrt{(\omega_c/\omega)^2-1}\,(\omega N_\perp/\omega_c)$$

e pertanto, esplicitando il coefficiente di normalizzazione, e raggruppando i fattori in maniera opportuna

$$\alpha_1^{(o)}(\bar{p}_{\perp e}=0) = \left[\left[\frac{\pi}{2\mu_\parallel}\right]^{1/2}\frac{e^{-\mu_\parallel}}{K_1(\mu_\parallel)}\right]\left[\frac{\omega_p}{\omega_c}\right]^2 N_\perp\frac{\omega_c}{\omega}\sqrt{\pi}\left[\frac{\mu_\parallel}{2}\left[\left[\frac{\omega_c}{\omega}\right]^2-1\right]\right]^{1/2} e^{-\mu_\parallel(\omega_c/\omega-1)} \quad (4.27')$$

ove $\omega < \omega_c$

Questo risultato coincide con quanto trovato in precedenza (Bornatici and Ruffina, 1985), a verifica della validità della (4.23).

A basse frequenze ω, il coefficiente di assorbimento (4.27') è pertanto catterizzato da un andamento esponenziale, mentre per frequenze vicine a quella di risonanza è dominante il fattore sotto il segno di radice che tende ad annullarsi.

Inoltre α non può mai diventare negativo (e quindi non si hanno instabilità) e presenta un massimo.

Per calcolare la posizione di tale massimo poniamo

$$x \equiv \frac{\omega}{\omega_c} \tag{4.28}$$

con $0 \leq x \leq 1$.

Il tal modo il massimo è localizzato nel punto dell'intervallo per il quale

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\pi}{2K_\perp} \frac{\omega_p^2}{c\omega_c} N_\perp e^{-\mu_\parallel / x} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right] = 0$$

e pertanto

$$\frac{\mu_\parallel}{x^2} \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = 0$$

la cui sola radice nell'intervallo considerato è

$$x = \frac{-1+\sqrt{1+4\mu_\parallel^2}}{2\mu_\parallel} \tag{4.29}$$

La posizione del massimo dipende pertanto dalla temperatura parallela del plasma (Fig. 4.2): si ha un down-shift relativistico in frequenza all'aumentare di $T_\parallel$.

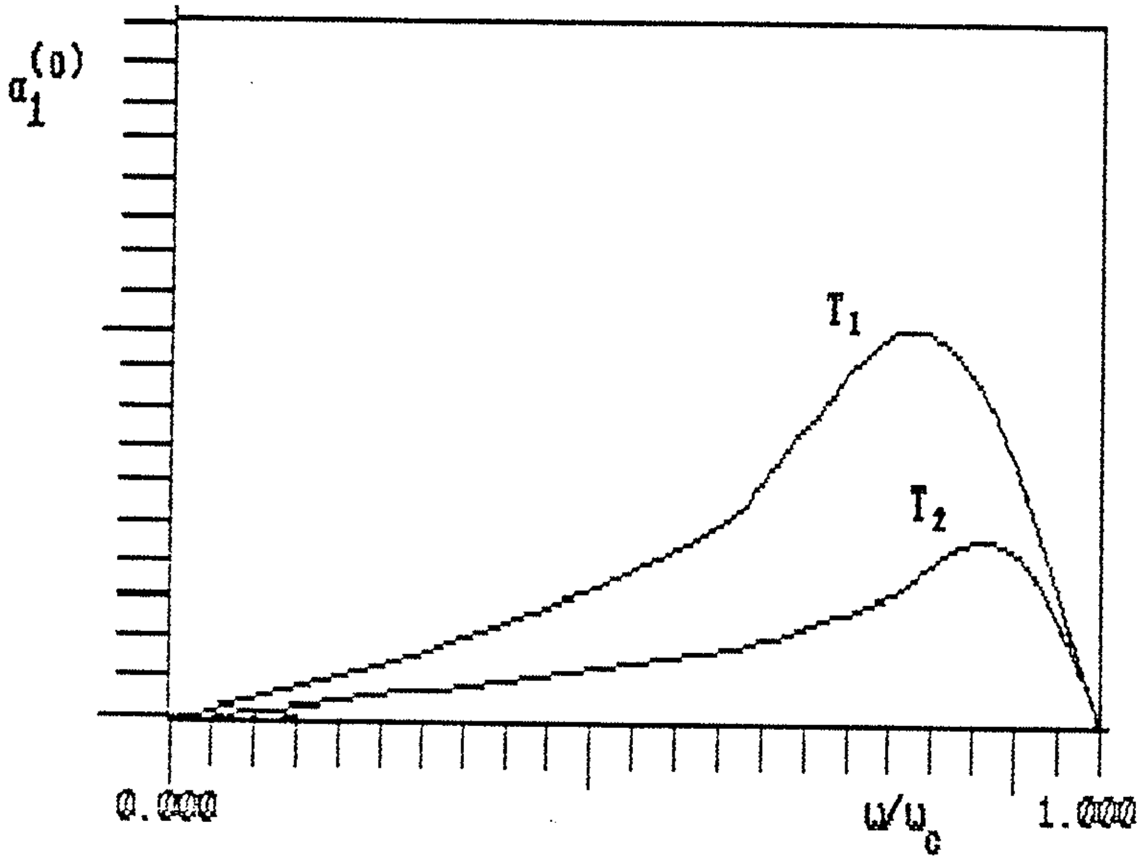
E' utile considerare anche il limite debolmente relativistico per il quale

$$\gamma = \sqrt{1+\bar{p}_\parallel^2+\bar{p}_\perp^2} \simeq 1+\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2 \tag{4.30}$$

In questo modo la (2.38) assume la forma

$$\alpha_n^{(o)} = -\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2 \int \bar{p}_\parallel^2 d\bar{p}_\parallel d\bar{p}_\perp \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel\left[1+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2\right]} \frac{\delta(\bar{p}_\perp - \bar{p}_{\perp o})}{\bar{p}_{\perp o}}\right] J_n^2(\omega N_\perp \bar{p}_\perp/\omega_c) \cdot$$
$$\cdot \delta\left(1+\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2 - n\omega_c/\omega\right) \tag{4.31}$$

Fig. 4.2



Andamento del coefficiente di assorbimento spaziale in funzione della frequenza per $p_{\perp 0} = 0$ $(T_1 > T_2)$.

Anche in questo caso possiamo utilizzare la condizione di risonanza ciclotronica per risolvere l'integrazione rispetto a $\bar{p}_\parallel$.

In particolare si ha risonanza per

$$\bar{p}_\parallel = \pm\sqrt{2(n\omega_c/\omega - 1 - \tfrac{1}{2}\bar{p}_\perp^2)} \equiv \bar{p}_\parallel^{\pm} \tag{4.32}$$

cui corrisponde la condizione su $\bar{p}_\perp$, che deve essere positivo

$$0 \le \bar{p}_\perp \le \sqrt{2(n\omega_c/\omega - 1)} \equiv \bar{p}_{\perp(max)} \tag{4.33}$$

con $n\omega_c/\omega \ge 1$.

In particolare per $\omega = n\omega_c$, cioè per frequenze pari a quella ciclotronica o alle sue armoniche, $\bar{p}_{\perp(max)}=0$ e quindi l'unico valore consentito per $\bar{p}_\perp$ è lo 0.

Per la proprietà della funzione delta (3.10), si può scrivere

$$\delta(1+\tfrac{1}{2}\bar{p}_\perp^2+\tfrac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2-n\omega_c/\omega) = 2\delta(\bar{p}_\parallel^2 - \bar{p}_\parallel^{\pm 2}) = \sum_{l=\pm} \frac{1}{|\bar{p}_\parallel^l|}\,\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l) \tag{4.34}$$

e pertanto il coefficiente di assorbimento (4.31) assume la forma

$$\alpha_n^{(o)}=-\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\sum_l \int \bar{p}_\parallel^2 d\bar{p}_\parallel d\bar{p}_\perp \frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel\left[1+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^2\right]}\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp o})}{\bar{p}_{\perp o}}\right] J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{|\bar{p}_\parallel^l|}\delta(\bar{p}_\parallel - \bar{p}_\parallel^l)$$

$$=-\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}c_\parallel\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\sum_l \int |\bar{p}_\parallel^l| e^{-\mu_\parallel\left[1+\frac{1}{2}\bar{p}_\parallel^{l\,2}\right]} d\bar{p}_\perp \frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp o})}{\bar{p}_{\perp o}}\right] J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c) \tag{4.31'}$$

Osserviamo che i due termini corrispondenti $\bar{p}_\parallel^+$ e $\bar{p}_\parallel^-$ risultano uguali e pertanto possiamo sostituire la sommatoria con un fattore 2.

Integriamo per parti nel solito modo e utilizziamo la seconda delta di cui disponiamo

$$\alpha_n^{(o)}=2\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{c_\parallel}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[n\omega_c/\omega-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2\right]}\sqrt{2(n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2)}J_n^2(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}}$$

$$=2\sqrt{2}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\frac{c_\parallel}{\bar{p}_{\perp *}}e^{-\mu_\parallel\left[n\omega_c/\omega-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2\right]}J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)\left[2\frac{N_\perp\omega}{\omega_c}\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}J_n'(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{p}_{\perp *}}{2\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}}J_n(\omega N_\parallel\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)+\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)\right]$$

Pertanto

$$\alpha_n^{(o)}=\frac{\sqrt{2}}{N_\perp}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2 e^{-\mu_\parallel\left[n\omega_c/\omega-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2\right]}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}J_n\left[\frac{N_\perp\omega}{\omega_c}\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}\,J_{n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{N_\perp\omega}{\omega_c}\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}\,J_{n+1}-\left[\frac{1}{2\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}}-\mu_\parallel\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}\right]J_n\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}\right] \qquad (4.35)$$

dove si è posto per brevità $J_n \equiv J_n(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)$

Il risultato (4.35) può anche essere ricavato direttamente da (4.23) ove

$$(n\omega_c/\omega)^2-1 = 2(n\omega_c/\omega-1) \qquad (4.36)$$

Nel limite debolmente relativistico nel quale ci siamo posti si ha

$$\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c \ll 1$$

e pertanto possiamo sviluppare in serie al primo ordine le funzioni di Bessel: prendiamo cioè la (4.24). Cosi facendo si ottiene

$$\alpha_n^{(o)}=\frac{\sqrt{2}}{N_\perp}\frac{\pi}{N_\perp}\frac{\omega}{c}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2 e^{-\mu_\parallel\left[n\omega_c/\omega-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2\right]}\left[\frac{N_\perp\omega}{\omega_c}\right]^{2n}\frac{\bar{p}_{\perp *}^{2(n-1)}}{2^{2n-1}n!(n-1)!}\left[\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^2}{4n(n+1)}\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}-\left[\frac{1}{\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2}}-\mu_\parallel\sqrt{n\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}\right]\frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{4n}\right] \qquad (4.37)$$

tale risultato segue direttamente da (4.25) con (4.36).

In particolare per la frequenza di risonanza fondamentale, cioè per n=1, si ottiene

$$\alpha_{\perp}^{(o)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\, K_{\perp}} \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} e^{-\mu_{\parallel}\left[\omega_c/\omega - \frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2\right]} N_{\perp}\frac{\omega}{c}\left[\sqrt{\omega_c/\omega - 1 - \tfrac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2} - \frac{(\omega N_{\perp}\bar{p}_{\perp *}/\omega_c)^2}{8}\sqrt{\omega_c/\omega - 1 - \tfrac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{\omega_c/\omega - 1 - \frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}} - \mu_{\parallel}\sqrt{\omega_c/\omega - 1 - \tfrac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}\right]\right] \tag{4.38}$$

Tale risultato è in accordo con quello ottenuto da Hsu e Lashmore (Hsu and Lashmore, 1985).

Dalle (4.37) e (4.38) si può osservare che il coefficiente di assorbimento spaziale può diventare negativo e pertanto si ha una <u>instabilità</u>.

In particolare, riferendoci a (4.38), il segno di $\alpha_{\perp}^{(o)}$ è connesso con il segno di

$$z - \frac{1}{8} z (\omega/\omega_c N_{\perp}\bar{p}_{\perp *})^2 - \frac{1}{4}\frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{z} + \frac{\mu_{\parallel}}{4}\bar{p}_{\perp *}^2 z \tag{4.39}$$

dove

$$z = \sqrt{\omega_c/\omega - 1 - \tfrac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2} \tag{4.40}$$

Il coefficiente di assorbimento si annulla allora per

$$z^2\left(1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\omega}{\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\perp *}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu_{\parallel}\bar{p}_{\perp *}^2\right) - \frac{1}{4}\bar{p}_{\perp *} = 0$$

e pertanto, posto

$$L^2 \equiv 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\omega}{\omega_c}N_{\perp}\bar{p}_{\perp *}\right)^2 + \frac{1}{4}\mu_{\parallel}\bar{p}_{\perp *}^2 \tag{4.40'}$$

deve essere

$$z^2 = \frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{4L^2}$$

Da ciò segue immediatamente che per la (4.40)

$$\frac{\omega_c}{\omega} = 1 + \frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{2}\left[1+\frac{1}{2L^2}\right]$$

e pertanto, risolvendo iterativamente rispetto a ω/ω_c e osservando che all'ordine più basso in ω/ω_c è $L^2 = 1-\frac{1}{8}N_\perp \bar{p}_{\perp *}+\frac{1}{4}\mu_\parallel \bar{p}_{\perp *}^2$, il coefficiente di assorbinemto spaziale si annulla per

$$\frac{\omega}{\omega_c} = 1 - \frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{2}\left[1+\frac{1}{2L^2(\omega=\omega_c)}\right] \equiv \frac{\omega_*}{\omega_c} \tag{4.41}$$

Cosicchè

$$\alpha_1^{(0)} \geq 0 \quad \text{se} \quad \omega \leq \omega_* \tag{4.42}$$

$$\alpha_1^{(0)} \leq 0 \quad \text{se} \quad \omega_* < \omega \leq \omega_1^* \equiv \omega_c\left[1+\frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{2}\right] \quad \text{(instabilità)} \tag{4.42'}$$

dove la condizione $\omega \leq \omega_1^*$ segue dal richiedere che il radicando di $\sqrt{\omega_c/\omega-1-\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2}$ sia maggiore o uguale a 0. E' da notare che nell'intorno di $\omega = \omega_1^*$ la (4.38) non è più valida; in particolare, (4.38) dà $\alpha_1^{(0)} \to -\infty$ per $\omega \to \omega_1^*$. D'altra parte, sulla base di (4.31') e (4.32) si ha che $\alpha_1^{(0)} = 0$ per $\omega = \omega_1^*$, cioè per $\bar{p}_\parallel^{\pm} = 0$.

Nell'intervallo di frequenze $0 < \omega \leq \omega_*$, per cui il coefficiente di assorbimento è positivo, $\alpha_1^{(0)}$ ha un massimo connesso con il punto stazionario della funzione (cfr. 4.38)

$$\left[zL^2 - \frac{1}{4}\,\frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{z}\right]e^{-\mu_\parallel z^2} \tag{4.43}$$

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[zL^2 - \frac{1}{4}\,\frac{\bar{p}_{\perp *}^2}{z}\right]e^{-\mu_\parallel z^2}\right\} = -\left[8\mu_\parallel L^2 z^4 - 2(2L^2+\mu_\parallel \bar{p}_{\perp *}^2)z^2 - \bar{p}_{\perp *}^2\right]\frac{e^{-\mu_\perp z^2}}{4z^2}$$

e pertanto il solo punto stazionario per la (4.37) è quello per il quale

$$z^2 = \frac{2L^2+\mu_\parallel \bar{p}_{\perp *}^2+\sqrt{(2L^2+\mu_\parallel \bar{p}_{\perp *}^2)^2+8\mu_\parallel L^2 \bar{p}_{\perp *}^2}}{8\mu_\parallel L^2}$$

Sostituendo ora a z la sua espressione si ottiene

$$\frac{\omega_c}{\omega}-\tfrac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2-1=\frac{2L^2+\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}^2+\sqrt{(2L^2+\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}^2)^2+8\mu_\parallel L^2\bar{p}_{\perp *}^2}}{8\mu_\parallel L^2}$$

che può essere risolta iterativamente inquanto $\omega \simeq \omega_c$.

In conclusione il massimo del coefficienta di assorbimento si ha per

$$\frac{\omega}{\omega_c}\simeq 1-\left[\frac{1}{2}\bar{p}_{\perp *}^2+\frac{2L^2+\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}^2+\sqrt{(2L^2+\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}^2)^2+8\mu_\parallel L^2\bar{p}_{\perp *}^2}}{8\mu_\parallel L^2}\right]\equiv\frac{\omega_M}{\omega_c}\qquad(4.44)$$

In particolare, per $L^2 \simeq 1$, cioè per $\mu_\parallel\bar{p}_{\perp *}^2 \ll 4$ (cfr. 4.40'), la (4.44) dà

$$\frac{\omega_M}{\omega_c}\simeq 1-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_\parallel}+\bar{p}_{\perp *}^2\right]\qquad(4.45)$$

da cui si vede che si verifica un (piccolo) "down-shift" relativistico in frequenza rispetto al caso in cui $\bar{p}_{\perp *}=0$.

Il profilo dell'assorbimento è mostrato qualitativamente in Fig. 4.3.

b) <u>onda straordinaria</u> $\rightarrow N_\perp^2=\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2/\varepsilon_{xx}$

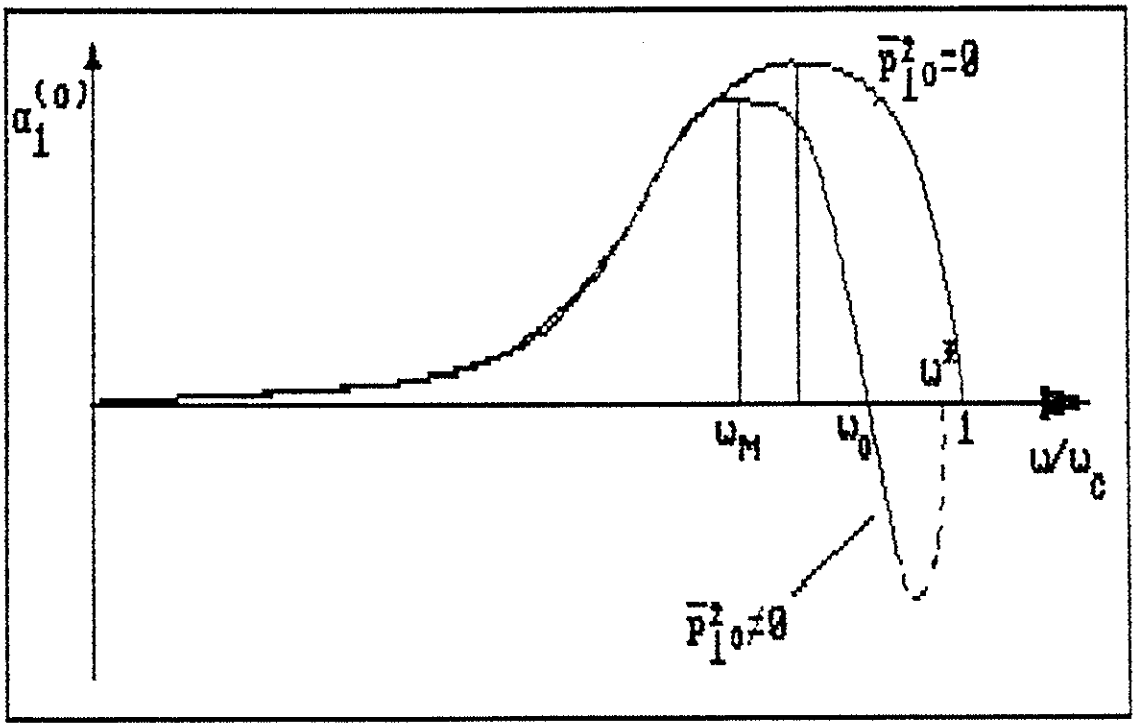
Nel caso dell'onda straordinaria vale la (2.46) e pertanto si ha

$$\alpha_n^{(x)}=-\frac{2\pi^2}{c}\,\omega\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\int d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel\,\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\,\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})^{1/2}}{2\pi\bar{p}_{\perp *}}\right]\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}J_n(a)+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\delta(\gamma-n\omega_c/\omega)\qquad(4.46)$$

$$=-\frac{\pi}{c}\,\omega\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\sum_l\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}d\bar{p}_\perp\int_{-\infty}^{\infty}d\bar{p}_\parallel\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l|}\,c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\,\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})^{1/2}}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\cdot\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}\cdot J_n(a)+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

Utilizziamo la condizione di risonanza ciclotronica e osserviamo che anche

Fig. 4.3



Andamento del coefficiente di assorbimento spaziale in funzione della frequenza nel limite debolmente relativistico in questo caso i due termini della sommatoria sono uguali

$$\alpha_n^{(x)}=-2\frac{\pi}{c}\;\omega\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\int_0^{\bar{p}_\perp(max)}d\bar{p}_\perp\,\frac{\gamma^+}{\bar{p}_\parallel^+}\;c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{+2})^{1/2}}\;\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp 0})^{1/2}}{\bar{p}_{\perp 0}}\right]\cdot$$
$$\cdot\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}\cdot J_n(a)+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2$$

Se integriamo per parti e sostituiamo a $c_\parallel$ la sua espressione otteniamo infine

$$\alpha_n^{(x)}=\frac{\pi}{c}\frac{\omega}{K_1}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^3\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\left|\frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}}\cdot J_n(a)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2-1}}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp 0}} \tag{4.47}$$

dove conviene lasciare indicata la derivata.

Nel limite di plasma freddo per il quale vale la (3.25), limitatamente alle armoniche con $n\geq 2$, si può scrivere

$$\alpha_n^{(x)}=\frac{\pi}{c}\frac{\omega}{K_1}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^3\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\left|A(\tfrac{\omega}{n})J_n(a)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\frac{1}{2}\bar{p}_\perp^2-1}}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp 0}} \tag{4.48}$$

e in particolare nel limite in cui $P_{\perp 0}=0$ si ha

$$\alpha_n^{(x)}=\frac{\pi}{c}\frac{\omega}{K_1}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^3\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\left|A(\tfrac{\omega}{n})J_n(a)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+i\frac{a}{n}J_n'(a)\right|^2\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-1}}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=0} \tag{4.49}$$

dove possiamo sviluppare in serie le funzioni di Bessel mediante la (4.24) ottenendo

$$\alpha_n^{(x)}=\frac{\pi}{c}\;\frac{\omega}{K_\perp}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\left|A(\omega)\;\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)^n}{2^n n!}\right.+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+i\frac{\omega N_\perp\bar{p}_\perp}{n\omega_c}\;\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\;\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)^n}{2^n n!}\right|^2\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=0}$$

$$=\frac{\pi}{c}\;\frac{\omega}{K_\perp}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\left|A(\omega)+i\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\right|^2\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)^{2n}}{(2^n n!)^2}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=0}$$

e pertanto

$$\alpha_n^{(x)}=\frac{\pi}{c}\;\frac{\omega}{K_\perp}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\left[\frac{n\omega_c}{\omega}\right]^2\frac{1}{N_\perp^3}\frac{1}{\bar{p}_{\perp 0}}\left|\frac{\omega_c\omega_p^2}{\omega}\;\frac{1}{\omega^2-\omega_p^2-\omega_c^2}+\frac{\omega}{\omega_c}N_\perp\right|^2\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel\left[(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2\right]^{1/2}}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{(\omega N_\perp\bar{p}_\perp/\omega_c)^{2n}}{(2^n n!)^2}\;\frac{1}{\sqrt{(n\omega_c/\omega)^2-\bar{p}_\perp^2-1}}\right]\right\}_{p_\perp=0}$$

ma per $n\geq 2$ come nel nostro caso questa espressione è nulla e pertanto

$$\alpha_n^{(x)}=0 \text{ per } n\geq 2 \qquad (4.50)$$

4.3 - Propagazione parallela: $N_\perp=0$

Nel caso delle onde che si propagano parallelamente al campo magnetico abbiamo tre diversi modi:

a) onde longitudinali (L) $\Rightarrow \varepsilon_{zz}=0$

In questo caso vale la (2.55) alla quale contribuisce la sola armonica di ordine 0 e pertanto

$$\alpha_\parallel^{(L)}=-4\pi^2\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial k'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega_p}{\omega}\right]^2\int\bar{p}_\perp d\bar{p}_\perp\bar{p}_\parallel d\bar{p}_\parallel\;\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\parallel}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp 0})}{2\pi\bar{p}_{\perp 0}}\right]\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel)$$

utilizziamo $\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})$ (tenendo presente che deve essere $\bar{p}_\perp\le\bar{p}_{\perp(max)}$) e sviluppiamo la derivata

$$=2\pi\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial k'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\int\bar{p}_\parallel^2 d\bar{p}_\parallel\;\frac{\mu_\parallel}{(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel)$$

per la (4.15) si ha poi

$$=2\pi\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial k'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_l\int\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\bar{p}_\parallel^2 d\bar{p}_\parallel\;\frac{\mu_\parallel}{(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\;\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

e quindi

$$\alpha_\parallel^{(L)}=\frac{\pi}{K_l}\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial k'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_l\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\bar{p}_\parallel^{l\,2}\frac{\mu_\parallel}{(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\;e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\tag{4.51}$$

Nel caso particolare in cui $\bar{p}_{\perp *}=0$ il coefficiente di assorbimento vale

$$\alpha_\parallel^{(L)}(\bar{p}_{\perp *}=0)=\frac{\pi}{K_l}\left|\frac{\partial\varepsilon_{h,zz}}{\partial k'}\right|^{-1}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\sum_l\frac{\mu_\parallel}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\bar{p}_\parallel^{l\,2}\;e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\tag{4.52}$$

dove $\bar{p}_\parallel^l$ è dato dalla (4.7) con $\bar{p}_{\perp *}=0$. Entrambe queste espressioni sono positive e pertanto non si ha instabilità.

b) <u>Polarizzazione destrogira (RH)</u> $\rightarrow E_y=iE_x$

In questo caso vale la (2.61), alla quale contribuisce solamente la prima armonica, e pertanto

$$\alpha_\parallel^{(RH)}=-\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{cN_\parallel}\left[\frac{\omega}{\omega}p\right]^2\int 2\pi\frac{\bar{p}_\perp^2 d\bar{p}_\perp d\bar{p}_\parallel}{\gamma}\left[\frac{1}{\bar{p}_\perp}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\partial\bar{f}_e}{\partial\bar{p}_\perp}+N_\parallel\frac{\partial\bar{f}_e}{\partial\bar{p}_\parallel}\right]\delta(\gamma-N_\parallel\bar{p}_\parallel-\omega_c/\omega)\tag{4.53}$$

Consideriamo separatamente i due integrali nei quali può essere suddivisa la (4.53).

Per il primo si ha

$$I_\perp^r=\sum_l\int_{-\infty}^{\infty}d\bar{p}_\parallel\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}\frac{\bar{p}_\perp^2\,d\bar{p}_\perp}{\gamma}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)$$

$$
=\sum_{l}\int_{0}^{\bar{p}_{\perp(max)}}\frac{\omega_c}{\omega}\frac{\bar{p}_\perp^2\,d\bar{p}_\perp}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]
$$

infine integrando per parti nel solito modo

$$
I_\perp^r=-\sum_l\frac{\omega_c}{\omega}c_\parallel\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\bar{p}_\perp^2}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}} \tag{4.54}
$$

Dove conviene lasciare indicata la derivata.

Per il secondo integrale invece si ha

$$
I_\parallel^r=\sum_l\int_{-\infty}^{\infty}d\bar{p}_\parallel\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}\frac{\bar{p}_\perp^3\,d\bar{p}_\perp}{\gamma}N_\parallel\frac{\gamma^l}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\parallel}\left[c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^2)^{1/2}}\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}\right]\delta(\bar{p}_\parallel-\bar{p}_\parallel^l)
$$

$$
=-\sum_l\int_0^{\bar{p}_{\perp(max)}}\frac{\bar{p}_\perp^3N_\parallel d\bar{p}_\perp}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\frac{\mu_\parallel\bar{p}_\parallel^l}{\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^{l\,2}}}c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\delta(\bar{p}_\perp-\bar{p}_{\perp *})}{\bar{p}_{\perp *}}
$$

$$
=-\sum_l\frac{\bar{p}_{\perp *}^2N_\parallel}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\frac{\mu_\parallel\bar{p}_\parallel^l}{\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^{l\,2}}}c_\parallel e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}} \tag{4.55}
$$

Pertanto si ha

$$
\alpha_\parallel^{(RH)}=\frac{\pi}{4N_\perp}\frac{\omega_p^2}{cN_\parallel}\frac{1}{\omega}\sum_l\left[\frac{\omega_c}{\omega}\frac{1}{\bar{p}_{\perp *}}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar{p}_\perp}\left[e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\bar{p}_\perp^2}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\right]\right\}_{\bar{p}_\perp=\bar{p}_{\perp *}}+\right.
$$

$$
\left.+e^{-\mu_\parallel(1+\bar{p}_\parallel^{l\,2})^{1/2}}\frac{\bar{p}_{\perp *}^2N_\parallel}{|\bar{p}_\parallel^l-N_\parallel\gamma^l|}\frac{\mu_\parallel\bar{p}_\parallel^l}{\sqrt{1+\bar{p}_\parallel^{l\,2}}}\right] \tag{4.56}
$$

c) Polarizzazione levogira (LH) $\Rightarrow E_y=-iE_x$

In questo caso infine il coefficiente di assorbimento è nullo, cioè

$$
\alpha_\parallel^{(LH)}=0 \tag{4.57}
$$

CONCLUSIONI

In questa Tesi si è ricavata per via diretta una nuova forma del tensore dielettrico relativistico, non contenente esplicitamente serie di funzioni di Bessel e simmetrica.

Il nuovo approccio ha permesso una verifica della generale validità di questi risultati e ha mostrato come la parte antihermitiana di questa forma del tensore dielettrico sia uguale a quella comunemente usata e pertanto non porti significativi vantaggi nel calcolo del coefficiente di assorbimento, che ha a che fare con la parte antihermitiana del tensore dielettrico.

Si è studiato l'assorbimento di onde elettromagnetiche per mezzo dall'equazione di bilancio dell'energia (teorema di Poynting). Tale approccio è particolarmente conveniente perchè permette di rendere esplicito il ruolo della polarizzazione dell'onda sull'assorbimento stesso.

Più specificamente nel secondo capitolo si calcolato il coefficiente di assorbimento per onde elettromagnetiche alla frequenza ciclotronica degli elettroni ed alle armoniche in un plasma con funzione di distribuzione arbitraria. Si sono considerati, in particolare, i modi di propagazione perpendicolare e parallela al campo magnetico di equilibrio ed il limite di plasma tenue.

Questi risultati sono stati poi specializzati a due funzioni di distribuzione fortemente anisotrope : le cosiddette "beam" e "ring-like distribution".

Nel caso della "ring-like distribution" si è in particolare studiata l'instabilità del modo ordinario per propagazione perpendicolare .

Il presente lavoro ha avuto come scopo quello di ottenere nuove espressioni analitiche per il coefficiente di assorbimento ciclotronico e pertanto non si è fatto uso di metodi numerici.

Per una valutazione quantitativa dell'assorbimento ci si propone ora di utilizzare le espressioni qui ottenute per una dettagliata analisi numerica.

Per un tale programma numerico, si pensa di utilizzare la nuova forma del tensore dielettrico ottenuta nel capitolo primo.

APPENDICE A: Il teorema di Poynting. I coefficienti di assorbimento spaziale e temporale

La dinamica delle onde in un mezzo é descritta dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} & \text{(A.1a)} \\[2ex] \nabla \times \underline{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\underline{J} & \text{(A.1b)} \end{cases}$$

dove la densita' di corrente $\underline{J}$ é espressa in termini del campo elettrico $\underline{E}$ per mezzo della legge di Ohm generalizzata (Landau and Lifsits, 1960)

$$\underline{J}(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt' \; \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r},\underline{r}',t,t') * \underline{E}(\underline{r}',t') \qquad \text{(A.2)}$$

essendo $\underline{\underline{\sigma}}$ il tensore conducibilità elettrica, che per un mezzo omogeneo e stazionario é tale che

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{r},\underline{r}',t,t') = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r}-\underline{r}',t-t') \qquad \text{(A.3)}$$

Prendendo il rotore della (A.1a) ed eliminando $\underline{B}$ per mezzo della (A.1b) si ottiene l'equazione d'onda per $\underline{E}$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} \qquad \text{(A.4)}$$

Moltiplicando invece scalarmente la (A.1a) e la (A.1b) rispettivamente per $\underline{B}$ ed $\underline{E}$ e sottraendole membro a membro si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{|E|^2}{8\pi} + \frac{|B|^2}{8\pi}\right] = -\nabla \cdot \left[\frac{c}{4\pi}(\underline{E} \times \underline{B})\right] - \underline{J} \cdot \underline{E} \qquad \text{(A.5)}$$

L'equazione (A.5) é una forma del "teorema di Poynting" che esprime la conservazione dell'energia. Il membro di sinistra rappresenta la variazione temporale della densità di energia del campo elettromagnetico, mentre $(-\underline{J}\cdot\underline{E})$ é il lavoro fatto dal campo per unità di volume.

Ciò significa che se si integra la (A.5) su un volume v, il termine

$$\int_v \nabla \cdot \left[\frac{c}{4\pi}(\underline{E} \times \underline{B})\right] dv = \oint_S \left[\frac{c}{4\pi}(\underline{E} \times \underline{B})\right] \cdot d\underline{s}$$

rappresenta il flusso di energia, descritto dal vettore di poynting $\frac{c}{4\pi}\underline{E}\times\underline{B}$, uscente dalla superficie S del volume considerato.

La (A.5) è quindi un'equazione di bilancio dell'energia elettromagnetica.

Le espressioni di cui sopra possono essere scritte in forma più conveniente utilizzando le trasformate di Fourier

La rappresentazione in componenti di Fourier di una funzione dello spazio $\underline{r}$ e del tempo t è (Melrose,1980)

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int \underline{E}(\underline{k},\omega)\; e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}d\omega\; d^3k \tag{A.6}$$

dove ω è la frequenza dell'onda, $\underline{k}$ il vettore d'onda e

$$\underline{E}(\underline{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \underline{E}(\underline{r},t)\; e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\; dt\; d^3r$$

è detto "ampiezza di Fourier" dell' onda.

Questo significa che $\underline{E}(\underline{r},t)$ è la sovrapposizione di "componenti monocromatiche" del tipo

$$\underline{E}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \tag{A.6'}$$

In termini della trasformata di Fourier, si ha

$$\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t) = \nabla\times\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int \underline{E}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\; d\omega\; d^3k$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int \left[i\underline{k}\times\underline{E}(\underline{k},\omega)\right]\; e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\; d\omega\; d^3k$$

$$\frac{\partial\underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \left[-i\omega\underline{B}(\underline{k},\omega)\right]\; e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\; d\omega\; d^3k$$

e l'equazione (A.1a) diventa

$$\int_{\infty}^{\infty}\int e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\left[i\underline{k}\times\underline{E}(\underline{k},\omega)\right]\; d\omega\; d^3k = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\left[-i\omega\;\underline{B}(\underline{k},\omega)\right]\; d\omega\; d^3k$$

ma l'intervallo di integrazione è tutto lo spazio di Fourier e quindi l'uguaglianza si trasferisce agli integrandi (cioè alle singole componenti monocromatiche):

$$\underline{k}\times\underline{E}(\underline{k},\omega) = \frac{\omega}{c}\,\underline{B}(\underline{k},\omega) \qquad (A.1a')$$

che è una forma della prima equazione di Maxwell molto più semplice della (A.1a) poichè non contiene derivate.

In pratica passando dallo spazio delle configurazioni allo spazio di Fourier e per grandezze lineari,gli operatori ∇ e $\partial/\partial t$ prendono la forma

$$\nabla \rightarrow i\underline{k} \qquad (A.8a)$$

$$\partial/\partial t \rightarrow -i\omega \qquad (A.8b)$$

Operando in questo modo la seconda equazione di Maxwell (A.1b) si scrive

$$\underline{k}\times\underline{B}(\underline{k},\omega) = -\frac{4\pi i}{c}\,\underline{J}(\underline{k},\omega) - \frac{\omega}{c}\,\underline{E}(\underline{k},\omega) \qquad (A.1b')$$

mentre l'equazione d'onda (A.4) diventa

$$\underline{k}\times\left[\underline{k}\times\underline{E}(\underline{k},\omega)\right] + \frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{E}(\underline{k},\omega) = -\frac{4\pi i}{c^2}\,\omega\,\underline{J}(\underline{k},\omega) \qquad (A.4')$$

La legge di Ohm (A.2) contiene il prodotto di due funzioni e pertanto è più complessa da trasformare.Se però si ipotizza che il mezzo sia omogeneo e stazionario si ricava (Bekefi,1966)[1]

$$\underline{J}(\underline{k},\omega) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega)\cdot\underline{E}(\underline{k},\omega) \qquad (A.9)$$

dove $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega)$ è definita da

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega) \equiv \int d^3r \int_0^\infty dt\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r},t)\ e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

cioè $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega)$ è la trasformata di Fourier di una grandezza che è zero per $t<0$

La formula (A,5) esprime la conservazione dell'energia istante per istante e non è conveniente trasporla in coordinate di Fourier.

---

[1]Occorre notare che Bekefi ed altri autori usano la rappresentazione di Fourier (A.6) con (-i) al posto di i ottenendo quindi, in generale, il complesso coniugato dei risultati qui dedotti.

Poichè infatti le componenti monocromatiche di Fourier (A.6') sono funzioni armoniche è sufficiente esprimere tale principio di conservazione mediante quantità mediate nel tempo.

A tale scopo osserviamo (Landau and Lifsits, 1985) che in generale date 2 grandezze complesse del tipo $\underline{A}(t)=\underline{A}_0 e^{i\omega t}$ e $\underline{B}(t)=\underline{B}_0 e^{i\omega t}$, il valore medio rispetto al tempo del prodotto scalare delle parti reali è

$$\overline{\underline{A}'\cdot\underline{B}'} = \frac{1}{4}\left(\underline{A}\cdot\underline{B}^* + \underline{A}^*\cdot\underline{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{A}\cdot\underline{B}^*\right)'$$

dove con $\underline{A}'$, $\underline{A}''$ e $\underline{A}^*$ indichiamo rispettivamente le parti reale e immaginaria e il complesso coniugato di $\underline{A}$.

Da ciò segue che il valor medio del lavoro compiuto dal campo per unità di volume è, per ciascuna componente monocromatica (A.6')

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[\underline{J}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\underline{E}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\right] \\
&=\frac{1}{4}\left[\underline{J}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\underline{E}^*(\underline{k},\omega)e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}+\underline{J}^*(\underline{k},\omega)e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\underline{E}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\underline{J}(\underline{k},\omega)\cdot\underline{E}^*(\underline{k},\omega) + \underline{J}^*(\underline{k},\omega)\cdot\underline{E}(\underline{k},\omega)\right] \qquad \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

Per ottenere dalle equazioni di Maxwell nello spazio di Fourier questa espressione basta moltiplicare scalarmente (A.1a') per $\underline{B}^*$, (A.1b') per $\underline{E}$ sommare e sottrarre a ciò $(A.1a')^*\cdot\underline{B}$ + $(A.1b')\cdot\underline{E}$.

Si ottiene infatti

$$\left\{\begin{aligned}
&(\underline{k}\mathrm{x}\underline{E})\cdot\underline{B}^* + (\underline{k}^*\mathrm{x}\underline{B}^*)\cdot\underline{E} = \frac{\omega}{c}\,\underline{B}\cdot\underline{B}^* + \frac{4\pi i}{c}\,\underline{J}^*\cdot\underline{E} - \frac{\omega^*}{c}\,\underline{E}^*\cdot\underline{E} \\
&(\underline{k}^*\mathrm{x}\underline{E}^*)\cdot\underline{B} + (\underline{k}\mathrm{x}\underline{B})\cdot\underline{E}^* = \frac{\omega^*}{c}\,\underline{B}^*\cdot\underline{B} - \frac{4\pi i}{c}\,\underline{J}\cdot\underline{E}^* - \frac{\omega}{c}\,\underline{E}\cdot\underline{E}^*
\end{aligned}\right.$$

da cui, poichè

$$(\underline{k}\mathrm{x}\underline{E})\cdot\underline{B}^* + (\underline{k}^*\mathrm{x}\underline{B}^*)\cdot\underline{E} = (\underline{E}\mathrm{x}\underline{B}^*)\cdot(\underline{k}-\underline{k}^*)$$

e analogamente

$$(\underline{k}^*\mathrm{x}\underline{E}^*)\cdot\underline{B} + (\underline{k}\mathrm{x}\underline{B})\cdot\underline{E}^* = (\underline{E}^*\mathrm{x}\underline{B})\cdot(\underline{k}^*-\underline{k})$$

si ottiene

$$(\underline{k}-\underline{k}^*)\cdot(\,\underline{E}\times\underline{B}^* + \underline{E}^*\times\underline{B}\,) = \frac{\omega-\omega^*}{c}\,|\underline{B}|^2 + \frac{4\pi i}{c}\,(\underline{J}^*\cdot\underline{E} + \underline{J}\cdot\underline{E}^*) + \frac{\omega-\omega^*}{c}\,|\underline{E}|^2$$

e quindi

$$2\underline{k}''\cdot\left(-\frac{c}{8\pi}\,(\underline{E}\times\underline{B}^* + \underline{E}^*\times\underline{B}\,\right) = 2\omega''\,\frac{|\underline{E}|^2 + |\underline{B}|^2}{8\pi} + \frac{1}{2}\,(\underline{J}^*\cdot\underline{E} + \underline{J}\cdot\underline{E}^*) \qquad (A.11)$$

dove $\underline{k}''\equiv\mathrm{Im}\,\underline{k}$ e $\omega''\equiv\mathrm{Im}\,\omega$.

La (A.11) esprime il "teorema di Poynting" nello spazio di Fourier (Bekefi,1966).

Se nella (A.4') eliminiamo $\underline{J}(\underline{k},\omega)$ mediante la legge di Ohm (A.9), l'equazione d'onda può essere scritta in una forma che contiene solo il campo elettrico:

$$\left[\frac{c^2}{\omega^2}\,(\underline{k}\underline{k}-k^2\underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega)\right]\cdot\underline{E}(\underline{k},\omega)=0 \qquad (A.12)$$

dove $\underline{kk}$ è una forma diadica e $\underline{\underline{\varepsilon}}$,definito da.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega) \equiv \underline{\underline{I}} + \frac{4\pi i}{\omega}\,\underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega) \qquad (A.13)$$

è il <u>tensore</u> <u>dielettrico</u> che descrive le proprietà elettriche del mezzo.

La (A.12) è (in coordinate cartesiane) equivalente a un sistema di 3 equazioni che accoppiano le tre componenti E_x,E_y,E_z del campo elettrico.Se poniamo

$$\underline{N} \equiv \frac{c}{\omega}\,\underline{k} \equiv N\,\hat{\underline{k}}$$

(<u>indice di rifrazione dell'onda</u>) il sistema prende la forma

$$\begin{cases} (N_x^2-N^2+\varepsilon_{xx})E_x + (N_xN_y+\varepsilon_{xy})E_y + (N_xN_z+\varepsilon_{xz})E_z = 0 \\ (N_xN_y+\varepsilon_{yx})E_x + (N_y^2-N^2+\varepsilon_{yy})E_y + (N_yN_z+\varepsilon_{yz})E_z = 0 \\ (N_xN_z+\varepsilon_{zx})E_x + (N_yN_z+\varepsilon_{zy})E_y + (N_z^2-N^2+\varepsilon_{zz})E_z = 0 \end{cases} \qquad (A.13')$$

Tale sistema ha soluzioni non triviali solamente se è verificata l'<u>equazione di dispersione</u>:

$$A \equiv \det \underline{\underline{A}} = 0 \tag{A.14}$$

dove, in virtù della (A.12)

$$\underline{\underline{A}} \equiv N^2\left[\frac{kk}{k^2} - \underline{\underline{I}}\right] + \underline{\underline{\varepsilon}} \tag{A.14'}$$

è il tensore di dispersione. In coordinate cartesiane la (A.14) assume la forma (cfr.(A.13'))

$$\begin{vmatrix} N_x^2-N^2+\varepsilon_{xx} & N_xN_y+\varepsilon_{xy} & N_xN_z+\varepsilon_{xz} \\ N_xN_y+\varepsilon_{yx} & N_y^2-N^2+\varepsilon_{yy} & N_yN_z+\varepsilon_{yz} \\ N_xN_z+\varepsilon_{zx} & N_yN_z+\varepsilon_{zy} & N_z^2-N^2+\varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0 \tag{A.14"}$$

Noto il tensore dielettrico la soluzione dell'equazione di dispersione può essere ottenuta nelle forme $\omega^{(j)}=\omega^{(j)}(\underline{k})$, per un problema di dipendenza temporale, o $N^{(j)}=N^{(j)}(\omega,\theta)$, per un problema di dipendenza spaziale (θ caratterizza la direzione di propagazione dell'onda). Le parti reale e immaginaria di queste soluzioni descrivono rispettivamente la dispersione e lo smorzamento (amplificazione) dell'onda.

Possiamo utilizzare la definizione di tensore dielettrico anche per scrivere diversamente il teorema di Poynting. Dalla legge di Ohm generalizzata (A.9) segue infatti che

$$\omega\ \underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E} = \omega\left[\underline{\underline{I}}+\frac{4\pi i}{\omega}\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{k},\omega)\right]\cdot\underline{E} = \omega\underline{E} + 4\pi i\ \underline{\underline{\sigma}}\cdot\underline{E} = 4\pi i\underline{J} + \omega\underline{E} \tag{A.15}$$

e quindi la (A.11) diventa

$$2\underline{k}''\cdot\left[c\left[\underline{E}\times\underline{B}^*+\underline{E}^*\times\underline{B}\right]\right] = 2\omega''|\underline{B}|^2 - i\underline{E}^*\cdot\left[\omega\underline{\underline{\varepsilon}} - \omega^*(\underline{\underline{\varepsilon}}^t)^*\right]\cdot\underline{E} \tag{A.16}$$

dove $\underline{\underline{\varepsilon}}^t$ è la trasposta di $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Affinchè l'onda si propaghi (ed è ovviamente questo il caso più interessante) lo smorzamento deve essere debole e pertanto

$$|\underline{k}''| \ll |\underline{k}'| \quad e \quad |\omega''| \ll |\omega'|$$

All'ordine più basso significativo in $|\underline{k}''|$ e ω'' si ha

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(\underline{k},\omega) \cong \varepsilon_{ij}(\underline{k}'+i\underline{k}'',\omega'+i\omega'') \simeq \varepsilon_{ij}(\underline{k}',\omega') + i\underline{k}''\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}\varepsilon_{ij} + i\omega''\frac{\partial}{\partial\omega'}\varepsilon_{ij} \\ \omega\varepsilon_{ij}(\underline{k},\omega) \simeq \omega'\varepsilon_{ij}(\underline{k}',\omega') + i\left[\omega'\underline{k}''\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}\varepsilon_{ij} + \omega''\frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega'\varepsilon_{ij})\right] \\ \omega^*\varepsilon^*_{ij}(\underline{k},\omega) \simeq \omega'\varepsilon^*_{ij} - i\left[\omega'\underline{k}''\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}\varepsilon^*_{ji} + \omega''\frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega',\varepsilon^*_{ij})\right] \end{cases}$$

Poniamo ora

$$\begin{cases} \varepsilon_{h,ij} \equiv \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{ij} + \varepsilon^*_{ji}) = \text{parte hermitiana di } \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{a,ij} \equiv \frac{1}{2i}\,(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^*_{ji}) = \text{parte antihermitiana di } \varepsilon_{ij} \end{cases}$$

La parte hermitiana di $\underline{\underline{\varepsilon}}$ descrive la risposta non dissipativa del mezzo interagente con l'onda mentre la parte hermitiana descrive la sua risposta dissipativa.

Si può in questo modo scrivere

$$\omega\varepsilon_{ij}(\underline{k},\omega)-\omega^*\varepsilon^*_{ji}(\underline{k},\omega)=2i\omega'\varepsilon_{a,ij}+2i\omega'\underline{k}''\cdot\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}(\varepsilon_{h,ij})+2i\omega''\frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega'\varepsilon_{h,ij}) \qquad (A.17)$$

Pertanto nell'<u>approssimazione di debole smorzamento</u> il teorema di Poynting si scrive (Bekefi, 1966):

$$2\underline{k}''\left[c(\underline{E}\times\underline{B}^*+\underline{E}^*\times\underline{B})-\omega'\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}(\varepsilon_{h,ij})E^*_iE_j\right]=2\omega''\left[|\underline{B}|^2+\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega'\varepsilon_{h,ij})E^*_iE_j+2\omega'\underline{E}^*\cdot\varepsilon_a\cdot\underline{E}\right] \quad (A.18)$$

o anche

$$2\underline{k}''\cdot\underline{S}(\underline{k}',\omega') = 2\omega''W(\underline{k}',\omega')+\frac{\omega'}{4\pi}\,\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} \qquad (A.18')$$

ove

$$\underline{S}(\underline{k}',\omega') \equiv \underline{P}(\underline{k}',\omega') + \underline{Q}(\underline{k}',\omega') \qquad (A.19)$$

è il flusso totale della densità di energia elettromagnetica, comprendente il contributo puramente elettromagnetico descritto dal vettore di Poynting

$$\underline{P}(\underline{k}',\omega') \equiv \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{Re}(\underline{E}\times\underline{B}^*) \qquad (A.20)$$

ed il <u>flusso di energia di sloshing</u>

$$\underline{Q}(\underline{k}',\omega') = -\frac{\omega'}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}(\varepsilon_{h,ij})E_i^*E_j \tag{A.21}$$

che descrive il flusso della densità di energia cinetica delle particelle del mezzo che si muovono coerentemente con l'onda.

Si osservi che dalla (A.18') segue che in approssimazione di debole smorzamento l'ordine di grandezza di $\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}$ è lo stesso di $\underline{k}''$, ma questo non implica necessariamente che anche $\underline{\underline{\varepsilon}}_a$ sia dello stesso ordine di $\underline{k}''$. Si noti anche che per onde elettrostatiche, cioè per $\underline{B}=0$, il flusso di energia (A.19) si riduce al solo termine di sloshing.

Inoltre nella (A.18')

$$W(\underline{k}',\omega') = \frac{|\underline{B}|^2}{8\pi} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega'\varepsilon_{h,ij})E_i^*E_j \tag{A.22}$$

è la densità di energia del campo elettromagnetico nel mezzo.

Eliminando il campo magnetico per mezzo della (A.1a'), il vettore di Poynting assume la forma

$$\underline{P} = \frac{\omega'}{8\pi}\left[\frac{c^2}{\omega'^2}\frac{d}{d\underline{k}'}(k^2\delta_{ij}-k_ik_j)E_i^*E_j\right] \tag{A.20'}$$

cosicchè il flusso totale (A.19) si può scrivere nella forma

$$\underline{S} = -\frac{\omega'}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\underline{k}'}A_{h,ij}E_i^*E_j \tag{A.19'}$$

essendo $\underline{\underline{A}}_h$ la parte hermitiana del tensore di dispersione (A.14').

Per quanto riguarda la densità di energia (A.22), usando la (A.1a') si ha

$$\begin{aligned}|\underline{B}|^2 &= \frac{c^2}{\omega^2}(\underline{k}\times\underline{E})\cdot(\underline{k}\times\underline{E}^*) = \\ &= \frac{c^2}{\omega^2}\underline{E}^*\cdot(k^2\underline{\underline{I}}-\underline{k}\underline{k})\cdot\underline{E} = \\ &= \underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_h\cdot\underline{E}\end{aligned} \tag{A.23}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (A.12) osservando che

$$\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}\cdot\underline{E} = \underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_h\cdot\underline{E} + i\underline{E}^+\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E} \simeq \underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_h\cdot\underline{E}$$

all'ordine più basso in $\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}$ (approssimazione di debole smorzamento). Da ciò segue che la (A.22) diventa (Bekefi, 1966)

$$W(\underline{k}',\omega') = \frac{1}{8\pi\omega'}\frac{\partial}{\partial\omega'}(\omega'^2\varepsilon_{h,ij})E_i^*E_j \qquad (A.22')$$

Sulla base della (A.18') si possono definire il <u>coefficiente di assorbimento (o di amplificazione) spaziale</u>

$$\alpha \equiv 2\underline{k}''\cdot\hat{\underline{S}} \qquad (A.24)$$

e il <u>coefficiente di assorbimento (o di crescita) temporale</u> $2\omega''$

Nel caso in cui la dipendenza spaziale è dominante rispetto a quella temporale (i.e. $\omega''= 0$) dalla (A.18') si ha

$$\alpha = \frac{\omega'}{4\pi}\frac{\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}}{|\underline{S}(\underline{k}',\omega')|} \qquad (A.24')$$

mentre nel caso di dipendenza temporale dominante rispetto a quella spaziale dalla (A.18') si ha

$$2\omega'' = -\frac{\omega'}{4\pi}\frac{\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}}{W(\underline{k}',\omega')} \qquad (A.25)$$

Combinando (A.24') con (A.25) per eliminare il campo elettrico si ottiene

$$\omega'' = -\frac{\alpha}{2}\frac{|\underline{S}|}{W} = -\underline{k}''\cdot\hat{\underline{S}}\frac{|\underline{S}|}{W} = -\frac{\underline{k}''\cdot\underline{S}}{W} \qquad (A.26)$$

Dalla definizione di velocità di gruppo segue che

$$\underline{v}_{gr} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial\underline{k}} = \frac{\underline{S}}{W} \qquad (A.27)$$

e pertanto

$$\alpha = -\frac{2\omega''}{|\underline{v}_{gr}|} \qquad (A.28)$$

$$\omega'' = -\underline{k}''\cdot\underline{v}_{gr} \qquad (A.29)$$

Si noti che il segno di α dipende solo dal segno di $\underline{E}^*\cdot\underline{\underline{\varepsilon}}_a\cdot\underline{E}$ mentre il segno di ω'' dipende anche dal segno della densità di energia W.

APPENDICE B: Calcolo cinetico del tensore dielettrico relativistico

Combinando le equazioni (A.9) e (A.13) si può scrivere il tensore dielettrico $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega)$ in termini della densità di corrente espressa nello spazio di Fourier $\underline{J}(\underline{k},\omega)$. Si ha infatti

$$\left[\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega)-\underline{\underline{I}}\right]\cdot\underline{E}(\underline{k},\omega) = \frac{4\pi i}{\omega}\,\underline{J}(\underline{k},\omega) \qquad (B.1)$$

dalla quale è possibile ottenere una espressione esplicita per $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{k},\omega)$ ricavando $\underline{J}(\underline{k},\omega)$ in funzione del campo elettrico.

Nello stesso tempo la densità di corrente è definita dalla (Akhiezer et al.,1975)

$$\underline{J}(\underline{r},t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \underline{v}\, f_{\alpha}(\underline{r},\underline{p},t)\; d^3p \qquad (B.2)$$

dove $f_{\alpha}(\underline{r},\underline{p},t)$ è la funzione di distribuzione delle particelle di specie α (dotate di carica elettrica q_{α}) ed è tale che $f_{\alpha}d^3rd^3p$ sia il numero di particelle presenti nel volume infinitesimo dello spazio delle fasi d^3rd^3p,centrato in $(\underline{r},\underline{p})$ al tempo t;$\underline{p}$ è il momento relativistico $\underline{p}=m\gamma\underline{v}$, con $\gamma=\sqrt{1+(p/mc)^2}$ il fattore relativistico di Lorenz.

La funzione di distribuzione f_{α} obbedisce all'equazione di Boltzmann che (nel limite in cui le collisioni siano trascurabili) si riduce alla <u>equazione di Vlasov</u> (relativistica) (Bekefi, 1966)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \underline{r}} + q\left(\underline{E} + \frac{\underline{v}\times\underline{B}}{c}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \underline{p}} = 0 \qquad (B.3)$$

dove si è tralasciato l'indice α.

Tale equazione può essere risolta con il metodo perturbativo in approssimazione lineare.

Procedendo in questa direzione e per un plasma magnetizzato che sia omogeneo e stazionario, scriviamo

$$\begin{cases} f = f_0 + \tilde{f} \\ \underline{E} = \tilde{\underline{E}} \\ \underline{B} = \underline{B}_0 + \tilde{\underline{B}} \end{cases}$$

dove con l'indice $_0$ si denota la parte di equilibrio e con la tilde la perturbazione. Si è assunto $\underline{E}_0=0$.

Per un equilibrio omogeneo e stazionario si ha

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial \underline{r}} = 0$$

e l'equazione di Vlasov (B.3) assume la forma

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{r}} + \frac{q}{c}(\underline{v}\times\underline{B}_0)\cdot\frac{\partial(f_0+\tilde{f})}{\partial \underline{p}} + q\left[\tilde{\underline{E}} + \frac{\underline{v}\times\tilde{\underline{B}}}{c}\right]\cdot\frac{\partial(f_0+\tilde{f})}{\partial \underline{p}} = 0 \qquad (\underline{B}.4)$$

All'<u>ordine zero</u> in $|\tilde{f}|/f_0$ si ha

$$(\underline{v}\times\underline{B}_0)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \underline{p}} = 0 \qquad (B.5)$$

Data la simmetria cilindrica attorno alla direzione del campo magnetico di equilibrio $\underline{B}_0$ è conveniente usare coordinate cilindriche assumendo $B_0=B_z$. Poichè in questo modo si ha

$$\frac{\partial}{\partial \underline{p}} = \left[\frac{\partial}{\partial \underline{p}_\perp}, \frac{1}{\underline{p}_\perp}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial p_\parallel}\right]$$

la (B.5) si riduce alla

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow f = f_0(p_\perp, p_\parallel) \qquad (B.6)$$

con $p_\parallel$ e $p_\perp$ costanti del moto.

Al primo ordine e con la (B.5) l'equazione di Vlasov (B.4) diventa

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{r}} + \frac{q}{c}(\underline{v}\times\underline{B}_0)\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \underline{p}} + q\left[\tilde{\underline{E}} + \frac{\underline{v}\times\tilde{\underline{B}}}{c}\right]\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \underline{p}} = 0 \qquad (B.7)$$

Questa equazione può essere risolta con il metodo delle caratteristiche (Stix, 1962). Poichè infatti si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{r}(\tau)}{d\tau} = \underline{v}(\tau) = \dfrac{\underline{p}(\tau)}{m\gamma(\tau)} \\ \dfrac{d\underline{p}(\tau)}{d\tau} = \dfrac{q}{c}(\underline{v}(\tau)\times\underline{B}_o) \end{cases} \qquad (B.8)$$

con $\underline{p}(\tau=t)=\underline{p}$ e $\underline{r}(\tau=t)=\underline{r}$, la (B.7) si può scrivere

$$\frac{d}{dt}\tilde{f} = -q\left[\tilde{\underline{E}} + \frac{v\times\tilde{B}}{c}\right]\cdot\frac{\partial f_o}{\partial \underline{p}}$$

o anche

$$\tilde{f}(\underline{r},\underline{p},t)=\tilde{f}\left[\underline{r}(t_o),\underline{p}(t_o),t_o\right]-q\int_{t_o}^{t}dt'\left[\tilde{\underline{E}}(\underline{r}(t'),t')+\frac{\underline{v}(t')\times\tilde{\underline{B}}(\underline{r}(t'),t')}{c}\right]\cdot\frac{\partial f_o}{\partial\underline{p}(t')} \qquad (B.9)$$

Poichè le perturbazioni che consideriamo sono di tipo ondulatorio è conveniente fare l'analisi di Fourier dell'equazione, cioè prendere

$$\tilde{f}(\underline{r},\underline{p},t) \longrightarrow f(\underline{k},\underline{p},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Inoltre, poichè ci interessano processi indipendenti dalle condizioni iniziali possiamo prendere $t_o=-\infty$.

In tali ipotesi perchè l'integrale converga è sufficiente che abbia una piccola parte immaginaria $Im(\omega) > 0$. Tuttavia questo implica che

$$\tilde{f}(\underline{r}(t_o),\underline{p}(t_o),t_o)= e^{-i\omega t}= e^{Im(\omega)t_o}e^{-iRe(\omega)t_o} \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad t_o \longrightarrow -\infty$$

Pertanto la (B.9) si può scrivere

$$f(\underline{k},\underline{p},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}=-q\int_{-\infty}^{t}dt'\left[\underline{E}(\underline{k},\omega)+\frac{1}{c}\left[\frac{\underline{p}(t')}{m\gamma'}\times\underline{B}(\underline{k},\omega)\right]\right]\cdot\frac{\partial f_o}{\partial\underline{p}(t')}e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}(t')-\omega t')} \qquad (B.10)$$

dove in seguito all'integrazione delle (B.8)

$$\begin{cases} \underline{p}(t') \equiv \underline{p}'=\left[p_\perp\cos(\varphi+\frac{\omega_c}{\gamma'}(t'-t)) \;,\; p_\perp\sin(\varphi+\frac{\omega_c}{\gamma'}(t'-t)) \;,\; p_\parallel\right] \\ \underline{r}(t')-\underline{r} \equiv \underline{r}'-\underline{r} = \left[\dfrac{p_\perp}{m\omega_c}\left[\sin(\varphi+\frac{\omega_c}{\gamma'}(t'-t))-\sin\varphi\right], -\dfrac{p_\perp}{m\omega_c}\left[\cos(\varphi+\frac{\omega_c}{\gamma'}(t'-t))-\cos\varphi\right], \dfrac{p_\parallel}{m\gamma'}(t'-t)\right] \end{cases} \qquad (B.11)$$

con $p_\perp$ e $p_\parallel$ costanti del moto, $\omega_c = \frac{qB_o}{mc}$ = frequenza ciclotronica della carica q e $\gamma' = \gamma$ = costante.

Se esprimiamo le componenti di Fourier del campo magnetico in termini del campo elettrico mediante la legge di Faraday

$$\underline{N}\times\underline{E} = \underline{B}$$

($\underline{N}$ = indice di rifrazione dell'onda) e effettuiamo il cambio di variabile di integrazione

$$\tau = -\frac{\omega_c}{\gamma}(t'-t)$$

si può scrivere la (B.10) nella forma

$$f(\underline{k},\underline{p},\omega) = -q\frac{\gamma}{\omega_c}\int_0^{\infty} d\tau \left\{\left[1-\frac{\underline{N}\cdot\underline{p}(\tau)}{mc\gamma}\right]\delta_{ij}+\frac{N_i p_j(\tau)}{mc\gamma}\right\}\frac{\partial f_0}{\partial p_i(\tau)}E_j e^{i\phi(\tau)} \qquad (B.12)$$

con

$$\phi(\tau) \equiv \gamma\frac{\omega}{\omega_c}\tau+\underline{k}\cdot\left[\underline{r}(\tau)-\underline{r}\right] = \left[\frac{\omega}{\omega_c}\gamma-\frac{\omega}{\omega_c}\frac{p_\parallel}{mc}N_\parallel\right]\tau+\frac{\omega}{\omega_c}\frac{p_\perp}{mc}\left\{N_x\left[\sin(\varphi-t)-\sin\varphi\right]-N_y\left[\cos(\varphi-t)-\cos\varphi\right]\right\}$$

$$(B.13)$$

Inserendo la (B.12) nella trasformata di Fourier di (B.2) ed utilizzando (B.1) si può scrivere il tensore dielettrico nella forma

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij}-i\sum_\alpha\frac{\omega^2_{p\alpha}}{\omega\omega_{c\alpha}}\int d^3p\,p_i\int_0^{\infty} d\tau\left\{\left[1-\frac{\underline{N}\cdot\underline{P}(\tau)}{m_\alpha c\gamma}\right]\delta_{lj}+\frac{N_l p_j(\tau)}{m_\alpha c\gamma}\right\}\frac{\partial F_{o\alpha}}{\partial p_l(\tau)}e^{i\phi_\alpha(\tau)} \qquad (B.14)$$

dove

$$\omega^2_{p\alpha} \equiv \frac{4\pi n_{o\alpha}q^2_\alpha}{m_\alpha} \qquad (B.15)$$

è il quadrato della frequenza di plasma della specie α, avendo posto $f_{o\alpha}=n_{o\alpha}F_{o\alpha}$, con $n_{o\alpha}$ la densità delle particelle e $F_{o\alpha}$ la funzione di distribisione all'equilibrio normalizzata in modo che $\int d^3p F_{o\alpha}=1$.

Espresso in coordinate cilindriche e per una singola specie di particelle il tensore dielettrico assume la forma

$$\varepsilon_{ij} =$$

$$= \delta_{ij} - i \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \int d^3\bar{p} \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}_\perp} \int_0^\infty d\tau \; e^{i\phi(\tau)} \left\{ \left[\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} + \frac{N_\parallel}{\gamma} F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \right] \bar{p}_j(\tau) + \left[1 - \frac{N \cdot \bar{p}(\tau)}{\gamma} \right] F_\alpha(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \delta_{zj} \right\} \quad (B.16)$$

dove si è posto

$$\begin{cases} \bar{\omega} \equiv \dfrac{\omega}{\omega_c} \\ \bar{\omega}_p \equiv \dfrac{\omega_p}{\omega_c} \\ \bar{p} \equiv \dfrac{p}{mc} \\ \bar{f}_0 \equiv (mc)^3 F_0 \\ F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \equiv \bar{p}_\perp \dfrac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\parallel} - \bar{p}_\parallel \dfrac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} \end{cases} \quad (B.17)$$

Una espressione formalmente più semplice per il tensore dielettrico si ottiene utilizzando l'identità di Jacobi (Tichonov and Samarskij, 1981)

$$e^{iz \sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} J_n(z)$$

(dove le $J_n(z)$ sono le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine n) e le (B.11) e (B.13).

Si può infatti scrivere (Bornatici et al, 1983)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p} \; \frac{S_{ij}^{(n)}}{\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega} N_\parallel \bar{p}_\parallel - n} + \left(\frac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \right) \delta_{iz} \delta_{jz} \int d^3\bar{p} \; \frac{\bar{p}_\parallel}{\bar{p}_\perp} F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \quad (B.18)$$

dove $S_{ij}^{(n)}$ è un tensore hermitiano che nel sistema di riferimento in cui $N_y = 0$ è definito da

$$S_{ij}^{(n)} \equiv \begin{vmatrix} \bar{p}_\perp U\left[\frac{n}{a} J_n\right]^2 & -\bar{p}_\perp U\frac{in}{a} J_n J_n' & \bar{p}_\parallel U\frac{n}{a} J_n^2 \\ \bar{p}_\perp U\frac{in}{a} J_n J_n' & \bar{p}_\perp U J_n'^2 & \bar{p}_\parallel U i J_n J_n' \\ \bar{p}_\parallel U\frac{n}{a} J_n^2 & -\bar{p}_\parallel U i J_n J_n' & (\bar{p}_\parallel^2/\bar{p}_\perp) U J_n^2 \end{vmatrix} \tag{B.19}$$

dove

$$\begin{cases} a \equiv \bar{\omega}\, N_\perp \bar{p}_\perp \\ U \equiv \dfrac{\partial \bar{f}_0}{\partial \bar{p}_\perp} + \dfrac{N_\parallel}{\gamma} F(\bar{p}_\perp, \bar{p}_\parallel) \\ \underline{N} \equiv (N_\perp, 0\ , N_\parallel) \end{cases} \tag{B.20}$$

inoltre dalla (B.19) seguono le <u>relazioni di Onsager</u>

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} = +\varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} \end{cases} \tag{B.21}$$

Per calcolare i coefficienti di assorbimento spaziale e temporale è necessario separare il tensore dielettrico nelle sue componenti hermitiana ed antihermitiana.

A questo scopo osserviamo che la (B.18) contiene l'integrale

$$\int d^3\bar{p} \quad \frac{S_{ij}^{(n)}}{\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}\, N_\parallel \bar{p}_\parallel - n} \tag{B.22}$$

caratterizzato da una singolarità per

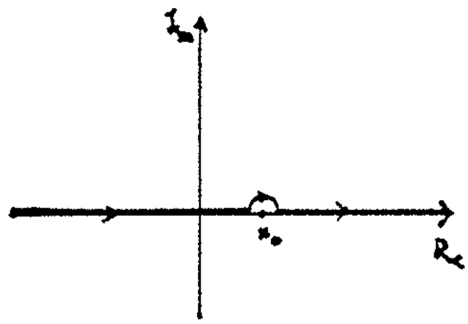
$$\bar{\omega}\ \gamma\ - \bar{\omega}\ N_\parallel \bar{p}_\parallel - n = 0 \tag{B.23}$$

che è la <u>condizione di risonanza ciclotronica</u> (discussa in dettaglio in nel cap.2 par.2).

La teoria del calcolo integrale per funzioni di variabile complessa (Dennery,1967), afferma che, volendo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx$$

con x_0 sul cammino di integrazione, $f(x)$ analitica e $|x^{\alpha} f(x)| \rightarrow$ costante se $|x| \rightarrow \infty$ per $\alpha > 0$, basta scegliere il cammino di integrazione come in figura. Così facendo si ha



$$Q = \int \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = P - i\pi f(x_0) = P - i\pi \int f(z)\,\delta(z-z_0)\, dz$$

con

$$P = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx \right]$$

detto <u>parte principale dell'integrale</u>.

Il tensore dielettrico (B.18) può essere separato nella sua parte hermitiana ed antihermitiana

$$\begin{cases} \varepsilon_{h,ij} = \delta_{ij} + \dfrac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} P \left[\int d^3\bar{p}\, \frac{S_{ij}^{(n)}}{\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}\, N_{\parallel} \bar{p}_{\parallel} - n} \right] + \left[\dfrac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \right] \delta_{iz}\delta_{jz} \int d^2\bar{p}\, \frac{\bar{p}_{\parallel}}{\bar{p}_{\perp}} F(\bar{p}_{\perp}, \bar{p}_{\parallel}) & \text{(B.24a)} \\ \varepsilon_{a,ij} = -\pi \dfrac{\bar{\omega}_p^2}{\bar{\omega}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3\bar{p}\, S_{ij}^{(n)} \delta(\bar{\omega}\gamma - \bar{\omega}\, N_{\parallel} \bar{p}_{\parallel} - n) & \text{(B.24b)} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

ABRAMOWITZ M. and STEGUN I. A. (1972) - Handbook of Mathematical Functions
Nat. Bureau of Standards

AKHIEZER A.I. et al (1975) - Plasma Electrodynamics
Pergamon Press, Oxford

BEKEFI G. (1966) - Radiation Processes in Plasmas
John Wiley & s. New York

BORNATICI M. et al. (1983) - Electron cyclotron emission in fusion plasmas
Nuclear Fusion 23,1153

BORNATICI M. and RUFFINA U. (1986) - APS Baltimore 1986,paper 6T4

BORNATICI M. and RUFFINA U. (1985) - Electron cyclotron absorption and emission in the presence of strong temperature anisotropy
EC-5, San Diego

BORNATICI M. and RUFFINA U. (1985) - Electron cyclotron emission in non Maxwellian plasmas
Spring College on Plasma Physics, ICTP Trieste

CHEN F.F. (1974) - Introduction to Plasma Physics
Plenum Press, New York

DENNERY P. and KRZYVICHI A. (1967) - Mathematics for Physicists
Harper & Row, Singapore

EVANGELIDIS E.A. (1983) - The summation of Bessel products
J. Math. Phys. 25,2151

FISCH N.J. (1987) - Theory of current drive in plasmas
Rev. Mod. Phys. 59,175

GRADSHTEYN I. and RYSHIK I. (1980) - Table of Integrals, Series and Products Corrected and Enlarged Edition
Academic Press, New York

JACKSON J.D. (1962) - Classical Electrodynamics
John Wiley & s., New York

JANG-YU HSU and LASHMORE-DAVIES C.N. (1985) - The stability of electron cyclotron waves in the presence of strong electron cyclotron heating
Int. Rep. GA-A18241

LANDAU L.D. and LIFSITS E.M. (1985) - Teoria dei Campi
Editori Riuniti, Roma

LEVINSON N. and REDHFFER (1970) - Complex Variables
Holden-Day, San Francisco

MELROSE D.B. (1980) - Plasma Astrophysics
Gordon & Breach, New York

NEVINS W.M. (1987) - Quasi-steady-state current drive with pulsed radiofrequency sources
Nuclear Fusion 27,951

NEWBERGER B.S. (1982) - New sum rule for products of Bessel functions with application to plasma physics
J. Math. Phys. 23,1278

ORZECHOWSKI T.J. et al. (1986) - High-efficiency extraction of microwave radiation from a tapered-wiggler free-electron laser

Phys. Rev. Let. 57,2172

STIX T.H. (1962) - The Theory of Plasma Waves

Mc Graw Hill, New York

STOTT P.E. (1986) - Progress with the JET experiment

Europhys. News 17,129

TAMOR S. (1986) - TENSOR: a code for computation of the relativistic high frequency conductivity tensor for a magnetized plasma with arbitrary electron distribution function

Int. Rep. SAIC-86/3081-APPAT-77

TIBER II, Tokamak Ignition/Burn Experimental Reactor, 1986 Status Report

Lawrence Livermore Nat. Lab., UCID-20863

TICHONOV A.N. and SAMARSKIJ A.A. (1981) - Equazioni della Fisica Matematica

Edizioni Mir, Mosca

TRAN M.Q. (1987) - Gyrotron, a novel high-power microwave source

EPS Bulletin

WHARTON C.B. (1958) - in Peaceful Uses of Atomic Energy Vol. 32,393

WEISS I. (1985) - Electromagnetic wave propagation in relativistic magnetized plasmas

J. Comp. Phys. 61,403