

# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Colore del cielo</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Radiazione di corpo nero, connessione tra colore e temperatura . . . . .  | 1         |
| 1.1.1 La quantizzazione dell'energia: la funzione di Planck . . . . .         | 2         |
| 1.1.2 Temperatura di colore . . . . .   | 3         |
| 1.2 L'acqua . . . . .   | 3         |
| 1.2.1 La molecola d'acqua e le sue proprietà . . . . .                        | 4         |
| 1.3 Assorbimento del rosso . . . . .  | 6         |
| 1.3.1 Legge di Lambert-Beer . . . . .   | 6         |
| 1.3.2 Cielo nuvoloso . . . . .  | 8         |
| 1.4 Temperatura di colore . . . . .   | 9         |
| 1.4.1 Variazione della temperatura di colore in funzione di $h_0$ . . . . .   | 10        |
| 1.5 Random walk . . . . .   | 11        |
| <b>2 Modelli matematici</b>   | <b>13</b> |
| 2.1 Approssimazione sferica . . . . .   | 14        |
| 2.2 Approssimazione piana . . . . .   | 17        |
| 2.2.1 Distribuzione uniforme . . . . .  | 18        |
| 2.2.2 Calcolo di $W$ in approssimazione piana: un secondo approccio . . . . . | 19        |
| 2.3 Traiettoria del fotone nella nube . . . . .                               | 21        |
| 2.3.1 La rifrazione . . . . .   | 21        |
| 2.3.2 La riflessione . . . . .  | 24        |
| 2.3.3 Stima della luce riflessa . . . . .                                     | 25        |
| 2.3.4 Le formule di Fresnel . . . . .   | 28        |
| 2.3.5 Calcolo della quantità di luce riflessa e rifratta . . . . .            | 28        |
| 2.3.6 Miglioramento della stima della profondità ottica media . . . . .       | 29        |
| 2.3.7 Riflessioni interne . . . . .   | 29        |
| 2.4 Distribuzione di fotoni . . . . .   | 31        |
| 2.4.1 Caso bidimensionale . . . . .   | 31        |
| 2.4.2 Caso tridimensionale . . . . .  | 32        |
| <b>3 Random Walk</b>  | <b>34</b> |
| 3.1 Il ray tracing . . . . .  | 34        |
| 3.2 Assorbimento della luce . . . . .   | 35        |
| 3.3 Distribuzione delle gocce d'acqua . . . . .                               | 36        |
| 3.3.1 La distribuzione esponenziale nel codice . . . . .                      | 38        |
| 3.4 Riflessione e rifrazione . . . . .  | 39        |
| 3.4.1 Trattazione tridimensionale . . . . .                                   | 40        |
| 3.5 Il programma . . . . .  | 43        |
| 3.6 Parametri caratteristici di una nube . . . . .                            | 44        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.6.1    | Lunghezza caratteristica . . . . .   | 44        |
| 3.6.2    | Total precipitable water . . . . .   | 45        |
| 3.6.3    | Dimensione delle gocce d'acqua . . . . .   | 46        |
| 3.7      | Il parametro d'impatto $b$ . . . . .   | 47        |
| 3.8      | Ulteriori approssimazioni . . . . .  | 48        |
| 3.8.1    | Traiettoria del fotone . . . . .   | 48        |
| 3.8.2    | Un'osservazione su $\theta_y$ . . . . .  | 48        |
| 3.8.3    | Indipendenza degli indici di rifrazione dalla lunghezza d'onda $\lambda$ . . . . . | 48        |
| 3.8.4    | Indice di rifrazione dell'acqua . . . . .  | 49        |
| <b>4</b> | <b>Analisi e risultati</b>   | <b>52</b> |
| 4.1      | Prima simulazione ( $L = 200$ m, $R = 5$ $\mu\text{m}$ , $T = 1$ cm) . . . . .     | 52        |
| 4.2      | Seconda simulazione ( $L = 200$ m, $R = 100$ $\mu\text{m}$ , $T = 1$ cm) . . . . . | 55        |
| 4.3      | Terza (e quarta) simulazione . . . . .   | 57        |
| 4.4      | Confronto con i dati di Lee . . . . .  | 57        |
| <b>A</b> | <b>Le nubi</b>   | <b>60</b> |
| A.1      | Formazione delle nuvole . . . . .  | 60        |
| A.2      | Atmosfera . . . . .  | 61        |
| A.3      | Classificazione delle nubi . . . . .   | 62        |
| <b>B</b> | <b>Programma</b>   | <b>65</b> |

# Introduzione

Il colore della luce solare sotto un cielo nuvoloso è caratterizzato da una “temperatura di colore” superiore alla temperatura del cielo sereno; in particolare un cielo nuvoloso può raggiungere anche una temperatura di colore pari a  $\simeq 20000$  K. Questo fenomeno, ben noto ai costruttori di apparati fotografici digitali, non ha ancora una spiegazione completa. Con la mia tesi intendo verificare l’ipotesi che il colore “blu” della luce solare in una giornata nuvolosa sia dovuto all’assorbimento delle frequenze rosse da parte delle particelle d’acqua presenti nelle nubi per effetto dei moti vibrazionali delle molecole stesse. Di conseguenza ho introdotto la radiazione di corpo nero, ho spiegato la connessione tra colore e temperatura e ho descritto alcune delle principali proprietà della molecola d’acqua, sottolineando in particolare l’esistenza di armoeniche, che sono vibrazioni dovute alla combinazione di stiramento simmetrico, asimmetrico e di piegamento dei legami covalenti della molecola, e che sono corresponsabili dell’assorbimento nella lunghezza d’onda del rosso. Attraverso la legge di Lambert-Beer si evidenzia che l’assorbimento nel rosso è proporzionale alla lunghezza che la luce solare percorre all’interno dell’acqua presente nelle nuvole, e che sono necessari all’incirca 1 m d’acqua per ottenere un valore di temperatura di colore pari a 6500 K, valore medio per la temperatura di colore di un cielo nuvoloso (e valore standard suggerito da alcuni costruttori di macchine fotografiche per eseguire il bilanciamento del bianco su di un cielo nuvoloso<sup>1</sup>). Sebbene la profondità di acqua totale delle nubi sia abbastanza piccola anche considerando nubi molto spesse, la presenza di scattering multipli aumenta notevolmente la piccola frazione di assorbimento selettivo che accade ogni qual volta la luce interagisce con una goccia d’acqua, arrivando così a giustificare i valori osservati di temperatura di colore. Ho introdotto perciò un modello di *random walk* atto a giustificare il fenomeno di assorbimento del rosso: ad ogni interazione con una goccia il fotone subisce rifrazione o riflessione che ne modificano il tragitto sino alla goccia d’acqua successiva. Il processo viene iterato fino a quando il fotone ha raggiunto uno dei confini della nube. Il modello è capace di predire il valore della temperatura di colore in funzione di alcuni parametri rappresentativi della nube: il raggio delle gocce d’acqua e la colonna d’acqua contenute nella nube stessa. Esso è inoltre in buon accordo con i dati presenti in letteratura. Il modello potrà essere migliorato apportando alcune modifiche. Le più importanti sono: 1) modifica degli indici di rifrazione in funzione di lunghezza d’onda, temperatura e pressione, 2) introduzione di una dimensione delle gocce d’acqua variabile all’interno della stessa nube (questo può aiutare a descrivere soprattutto le nubi più estese in altezza).

---

<sup>1</sup>Si confronti Raymond L. Lee Jr. and Javier Hernández-Andrés, *Colors of the daytime overcast sky*, Optical Society of America (2005).

# Capitolo 1

## Colore del cielo

In questa tesi magistrale abbiamo voluto studiare l'assorbimento nel rosso dello spettro solare causato dal passaggio della luce all'interno delle nubi atmosferiche. Nel seguente capitolo introduciamo alcuni concetti indispensabili per ottenere una comprensione accurata del problema. Nel capitolo 2 descriviamo il modello metereologico da noi ideato per descrivere il fenomeno. Nel capitolo 3 descriviamo il codice creato in C che ha permesso un confronto tra il modello creato e le misure presenti in letteratura (capitolo 4).

### 1.1 Radiazione di corpo nero, connessione tra colore e temperatura

Chiunque abbia osservato la costellazione di Orione in una limpida notte invernale avrà notato i differenti colori della rossa Betelgeuse e della blu-bianca Rigel; la differenza del colore nel visibile è un indizio sulla differente temperatura superficiale delle due stelle. Betelgeuse ha una temperatura superficiale di circa 3600 K, mentre la superficie di Rigel si trova a 13000 K. La connessione tra il colore di luce emessa da un oggetto caldo e la sua temperatura superficiale  $T$  è stata notata per la prima volta nel 1792 dall'inglese Thomas Wedgewood. I suoi forni diventavano rossi per il calore non appena raggiunta una fissata temperatura, indipendentemente dalla loro dimensione, forma e materiale. Le successive ricerche di molti fisici rivelarono che un qualsiasi oggetto con temperatura vicina allo zero assoluto emette luce in tutte le lunghezze d'onda con vari gradi di efficienza; un *emittitore ideale* è un oggetto che assorbe *tutta* l'energia della luce incidente su di esso e la riemette secondo uno spettro ben preciso. Poiché un emittitore ideale non riflette luce è chiamato *corpo nero*, e la radiazione che esso emette è chiamata *radiazione di corpo nero*. Le stelle e i pianeti sono con buona approssimazione dei corpi neri<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Si confronti [4].

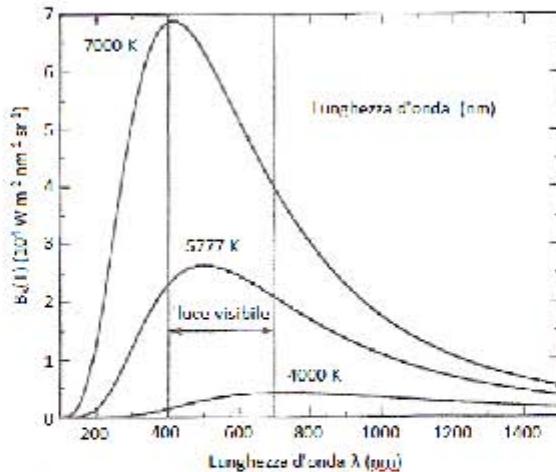


Figura 1.1: Spettro di corpo nero.

La figura 1.1 mostra che un corpo a temperatura  $T$  emette in uno spettro continuo con un determinato valore<sup>2</sup> di energia per ogni lunghezza d'onda, e mostra inoltre che lo spettro picca ad una determinata lunghezza d'onda  $\lambda_{max}$  che diventa via via più corta al crescere della temperatura. La relazione tra  $\lambda_{max}$  e  $T$  è conosciuta come legge dello spostamento di Wien

$$\lambda_{max} T = 0.002897755 \text{ m K} .$$

### 1.1.1 La quantizzazione dell'energia: la funzione di Planck

Uno dei problemi affrontato dalla comunità scientifica verso la fine del diciannovesimo secolo è stato quello di riuscire a derivare dai principi fisici fondamentali la curva della radiazione di corpo nero presentata in figura 1.1. Lord Rayleigh (1842 – 1919) provò a risolvere il problema applicando le equazioni di Maxwell della teoria dell'elettromagnetismo classico ai risultati della fisica termodinamica. Riportiamo i risultato a cui arrivò, tralasciando i dettagli del suo procedimento. Definite  $c$  come la velocità della luce,  $k$  come la costante di Boltzmann,  $T$  come la temperatura e  $\lambda$  come la lunghezza d'onda, possiamo dire che la curva di radiazione di corpo nero  $B_\lambda(T)$  è pari a

$$B_\lambda(T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} . \quad (1.1)$$

L'eq. (1.1), conosciuta oggi come la legge di Rayleigh-Jeans, riscontra dei problemi quando si considera la soluzione per  $\lambda$  che tende a 0: il risultato matematico dell'equazione è di tendere all'infinito (ciò è noto come il problema della “catastrofe ultravioletta”).

Anche Wien stava lavorando allo sviluppo di un'espressione matematica che descrivesse correttamente la curva di radiazione di corpo nero. Guidato dalla legge di Stefan-Boltzmann (secondo la quale la luminosità  $L$  di un corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura), e utilizzando la fisica termodinamica classica, Wien sviluppò una legge empirica in grado di descrivere la curva per piccole lunghezze d'onda (e non valida per le lunghezze d'onda più grandi).

<sup>2</sup>Il valore dell'energia si può calcolare secondo la funzione di Planck. Si confronti la sezione 1.1.1.

L'espressione è

$$B_\lambda(T) = a\lambda^{-5}e^{-b/\lambda T},$$

con  $a$  e  $b$  presi per ottenere il miglior fit dei dati sperimentali.

Nel 1900 il fisico Max Planck modificò l'equazione di Rayleigh-Jeans in modo tale da mantenerne la validità per grandi lunghezze d'onda e contemporaneamente risolvere i problemi che l'equazione presentava per piccole lunghezze d'onda; l'espressione, chiamata funzione di Planck, è pari a

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}. \quad (1.2)$$

L'eq. (1.2) è l'espressione matematica della curva dello spettro di corpo nero di figura 1.1.

### 1.1.2 Temperatura di colore

Per associare al colore una determinata temperatura è necessario introdurre la definizione di *temperatura di colore*. La temperatura di colore di una fonte di luce corrisponde alla temperatura che un corpo nero ha nel momento in cui irradia una luce con un colore paragonabile a quello della fonte di luce stessa<sup>3</sup>.

## 1.2 L'acqua

L'acqua è la principale assorbitrice della luce solare in atmosfera. I 13 milioni di milioni di tonnellate d'acqua presenti in atmosfera sono responsabili del 70%<sup>4</sup> di tutto l'assorbimento atmosferico di radiazione<sup>5</sup>. Questa molecola, così preziosa per la nascita della vita, e al contempo così semplice nella sua struttura, costituirà l'oggetto principale della nostra indagine. Osserviamo questa bellissima fotografia di cielo nuvoloso australiano:



Figura 1.2: Cielo nuvoloso.

<sup>3</sup>Poiché nelle stelle il valore della temperatura di colore e il valore della temperatura superficiale sono con ottima approssimazione coincidenti (si confronti [4]), d'ora in avanti utilizzeremo i due termini indifferenemente.

<sup>4</sup>Il rimanente 30% è dovuto alla presenza di polvere in atmosfera.

<sup>5</sup>L'assorbimento avviene principalmente nella regione infrarossa, in cui l'acqua presenta una forte capacità assorbitiva (si confronti la sezione 1.3).

Si può notare una prevalenza del colore blu all'interno dell'immagine: tale effetto potrebbe erroneamente essere attribuibile unicamente ad uno scattering di Rayleigh, oppure si potrebbe osservare (come fece Middleton [13]) che la presenza di nubi non abbia un grande effetto se non quello di riflettere la luce proveniente dal suolo; queste considerazioni sono in relativa contraddizione con articoli più recenti<sup>6</sup> e con quanto mostreremo in questo lavoro: la giustificazione di quanto osserviamo infatti è da ricercare piuttosto nella natura della molecola d'acqua e nel suo spettro di assorbimento.

### 1.2.1 La molecola d'acqua e le sue proprietà

L'acqua deve il suo colore blu all'assorbimento selettivo nella parte rossa dello spettro del visibile. È noto [3] che il blu intrinseco dell'acqua è l'unico esempio della natura in cui il colore ha origine a causa di transizioni vibrazionali degli atomi che compongono la molecola. Altri materiali devono il loro colore all'interazione della luce visibile con gli elettroni appartenenti al materiale stesso: il loro colore può originarsi a causa di interazioni risonanti tra i fotoni e la materia attraverso una molteplicità di effetti tra i quali fenomeno di assorbimento, emissione, riflessione selettiva, o a causa di processi non risonanti, come lo scattering di Rayleigh, l'interferenza, la diffrazione o la rifrazione, ma in ogni caso i fotoni interagiscono principalmente o esclusivamente con gli elettroni<sup>7</sup>.

La molecola d'acqua può vibrare in un molteplice numero di modi a causa di una combinazione di vibrazioni simmetriche, asimmetriche e di piegamento dei legami covalenti

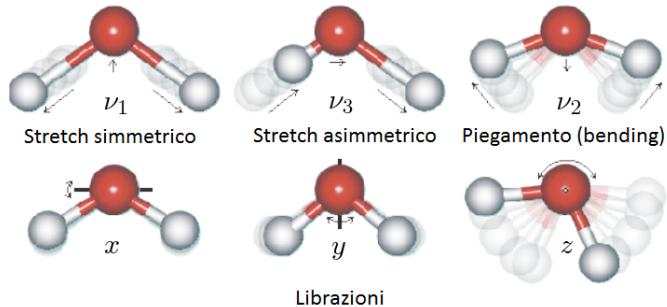


Figura 1.3: Vibrazioni simmetriche, asimmetriche e di piegamento (bending) della molecola d'acqua. In rosso sono mostrati gli atomi di ossigeno, in bianco/grigio gli atomi d'idrogeno.

In figura 1.3 sono mostrate le principali vibrazioni che occorrono nella molecola d'acqua. Poiché l'ossigeno è più elettronegativo dell'idrogeno, si lega ad esso generando un momento di dipolo. I momenti di dipolo cambiano in direzione dei movimenti degli atomi d'ossigeno, come mettono in evidenza le frecce stesse in figura. Poiché gli atomi di idrogeno sono più leggeri, le loro vibrazioni hanno ampiezze maggiori. La molecola d'acqua ha inoltre un piccolo momento d'inerzia di rotazione: nell'acqua liquida le rotazioni sono ridotte a causa del legame idrogeno<sup>8</sup>, dando origine a delle librazioni.

<sup>6</sup>Si confronti [10].

<sup>7</sup>Per i dettagli dei moti vibrazionali attraverso i quali l'acqua acquista il suo colore rimandiamo alla lettura dell'articolo di Charles L.Braun [3].

<sup>8</sup>Il legame idrogeno è un legame fra un atomo di idrogeno e un atomo elettronegativo, che nel caso dell'acqua è l'atomo di ossigeno.

A causa delle innumerevoli possibilità di combinazione dei modi di vibrazione, lo spettro di assorbimento dell'acqua è molto complesso. Il punto da sottolineare è che alcune delle combinazioni di questi modi (che chiameremo d'ora in avanti *overtoni*<sup>9</sup>) originano un assorbimento nello spettro del visibile.

Per completezza osserviamo che in questo lavoro di tesi la suddivisione dei colori all'interno dello spettro visibile segue la ripartizione utilizzata da Craig F.Bohren<sup>10</sup>, che abbiamo riportato in figura 1.4.

| colore    | intervallo in lunghezza d'onda | intervallo in frequenza |
|-----------|--------------------------------|-------------------------|
| rosso     | ~ 700–635 nm                   | ~ 430–480 THz           |
| arancione | ~ 635–590 nm                   | ~ 480–510 THz           |
| giallo    | ~ 590–560 nm                   | ~ 510–540 THz           |
| verde     | ~ 560–490 nm                   | ~ 540–610 THz           |
| blu       | ~ 490–450 nm                   | ~ 610–670 THz           |
| violetto  | ~ 450–400 nm                   | ~ 670–750 THz           |

Figura 1.4: Lunghezze d'onda dello spettro visibile.

Per quanto riguarda i valori specifici delle lunghezze d'onda nel visibile a cui si presentano gli *overtone* abbiamo in letteratura un buon accordo sui dati; riportiamo nella figura 1.5 alcuni dei risultati dei lavori di Braun et al. [3] e di M.Chaplin [5].

| gas <sup>a</sup> | assignment <sup>a</sup>   | liquid                     | shift  |
|------------------|---------------------------|----------------------------|--------|
| 3.6517           | $\nu_1$                   | 3.40 <sup>b</sup>          |        |
| 3.7558           | $\nu_3$                   |                            |        |
| 5.332            | $\nu_2 + \nu_3$           | 5.15 <sup>c</sup>          | 0.18 7 |
| 7.2516           | $\nu_1 + \nu_3$           | 6.90 <sup>c</sup>          | 0.35   |
| 8.807            | $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$   | 8.40 <sup>c</sup>          | 0.41   |
| 10.613           | $2\nu_1 + \nu_3$          | 10.3 <sup>c</sup>          | 0.31   |
| 13.831           | $3\nu_1 + \nu_3$          | 13.16(760 nm)              | 0.67   |
| 14.319           | $\nu_1 + 3\nu_3$          | 13.51(740 nm) <sup>d</sup> | 0.81   |
| 15.348           | $3\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$  | 15.15(660 nm)              | 0.20   |
| 15.832           | $\nu_1 + \nu_2 + 3\nu_3$  | 15.15(660 nm)              | 0.681  |
| 16.822           | $3\nu_3 + 2\nu_2 + \nu_1$ |                            |        |
| 16.899           | $4\nu_3 + \nu_1$          | 16.53(605 nm)              | 0.37   |

| Wavelength   | cm <sup>-1</sup> | Assignment                       | Wavelength **                                | cm <sup>-1</sup> | Assignment                       |
|--------------|------------------|----------------------------------|--|------------------|----------------------------------|
| 0.2 mm       | 50               | intermolecular bend              | 1470 nm                                      | 6800             | $a\nu_1 + b\nu_3; a+b=2$         |
| 55 $\mu$ m   | 183.4            | intermolecular stretch           | 1200 nm                                      | 8330             | $a\nu_1 + \nu_2 + b\nu_3; a+b=2$ |
| 25 $\mu$ m   | 395.5            | $L_1$ , librations               | 970 nm                                       | 10310            | $a\nu_1 + b\nu_3; a+b=3$         |
| 15 $\mu$ m   | 686.3            | $L_2$ , librations               | 836 nm                                       | 11960            | $a\nu_1 + \nu_2 + b\nu_3; a+b=3$ |
| 6.08 $\mu$ m | 1645             | $\nu_2$ , bend                   | 739 nm                                       | 13530            | $a\nu_1 + b\nu_3; a+b=4$         |
| 4.65 $\mu$ m | 2150             | $\nu_2 + L_2$ <sup>b</sup>       | 660 nm                                       | 15150            | $a\nu_1 + \nu_2 + b\nu_3; a+b=4$ |
| 3.05 $\mu$ m | 3277             | $\nu_1$ , symmetric stretch      | 606 nm                                       | 16500            | $a\nu_1 + b\nu_3; a+b=5$         |
| 2.87 $\mu$ m | 3490             | $\nu_3$ , asymmetric stretch     | 514 nm                                       | 19460            | $a\nu_1 + b\nu_3; a+b=6$         |
| 1900 nm      | 5260             | $a\nu_1 + \nu_2 + b\nu_3; a+b=1$ | Note that a and b are integers, $\geq 0$ ms. |                  |                                  |

Figura 1.5: Braun et al. e Chaplin, stati di eccitazione dell'acqua.

Il primo *overtone* che si incontra nel range del visibile (proveniendo dall'infrarosso) è posto a 660 nm, (lunghezza d'onda del rosso).

<sup>9</sup>Traduzione dall'inglese *overtone*.

<sup>10</sup>Si confronti [1].

### 1.3 Assorbimento del rosso

In questa sezione introduciamo la formula dell'assorbimento di Lambert-Beer e spieghiamo come lo spettro di Planck venga modificato nel momento in cui la luce viene assorbita da un mezzo.



#### 1.3.1 Legge di Lambert-Beer

Consideriamo un fascio di luce di intensità  $I_0$  che attraversa un mezzo di lunghezza  $l$  (misurata in cm); definito  $\mu_\alpha$  come il coefficiente d'assorbimento (in  $\text{cm}^{-1}$ ), l'intensità di luce ( $I$ ) trasmessa è pari a

$$I = I_0 \exp(-\mu_\alpha l) . \quad (1.3)$$

L'eq. (1.3) prende il nome di legge di Lambert-Beer e descrive l'assorbimento della luce nel passaggio in un mezzo omogeneo. Tanto più sarà spesso il mezzo e tanto più si osserverà l'effetto di assorbimento.

Riportiamo i dati di Segelstein<sup>11</sup> per il coefficiente di assorbimento  $\mu_\alpha$  per l'acqua che utilizzeremo nel nostro lavoro

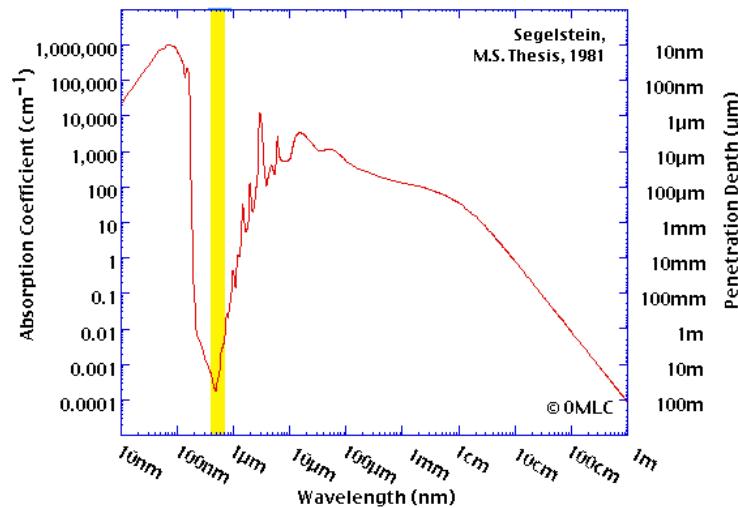


Figura 1.6: Coefficiente di assorbimento dell'acqua. La colonna gialla indica il range del visibile.

<sup>11</sup>Si confronti [15].

Consideriamo come mezzo l'acqua, e come fonte di luce il Sole (con temperatura superficiale di 5777 K), e applichiamo la legge di Lambert-Beer per l'assorbimento: il risultato è che per ogni  $l$  considerato abbiamo lo spettro di assorbimento relativo a quella lunghezza di assorbimento. Ad ogni spettro corrisponderà una singola temperatura di colore, che per l'assorbimento nel rosso sarà superiore alla temperatura superficiale del Sole: in sezione 1.4 approfondiremo questo argomento. In figura 1.7 abbiamo rappresentato gli spettri di assorbimento ottenuti prendendo come lunghezza  $l = 1$  cm,  $l = 10$  cm,  $l = 1$  m e  $l = 10$  m.

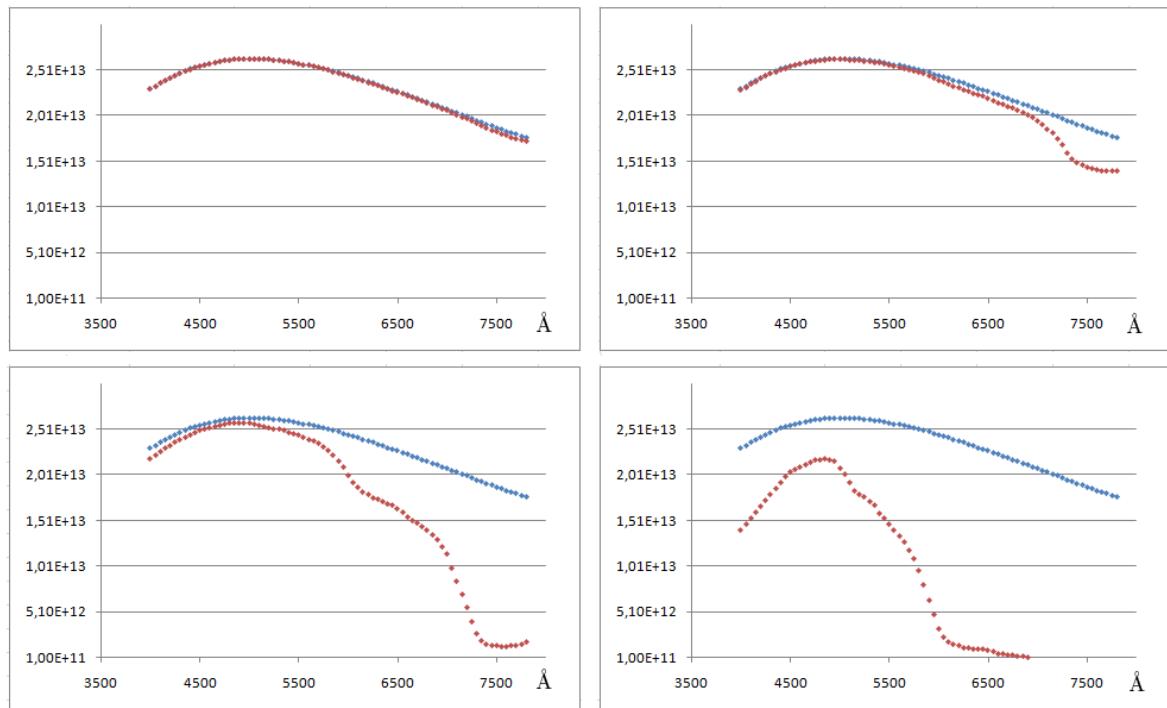


Figura 1.7: In ordine orario partendo dall'immagine in alto a sinistra: spettro senza assorbimento (in blu) e spettro con assorbimento (in rosso) con cammino ottico pari a 1 cm, 10 cm, 1 m, 10 m.

In figura 1.7 si può notare per  $l = 1$  m e per  $l = 10$  m una “spalla” nella curva di assorbimento intorno ai 6500 Å. Questo fatto potrebbe giustificare la mancanza del rosso (e quindi l'abbondanza del blu) nello spettro della luce solare in presenza di nubi, dando così ragione del blu accentuato della figura 1.2.

### 1.3.2 Cielo nuvoloso

In figura 1.8 riportiamo un’immagine presentata da Raymond L.Lee (Jr) e Javier Hernández-Andrés in un articolo sullo studio del colore del cielo<sup>12</sup>. L’immagine composta con un obiettivo

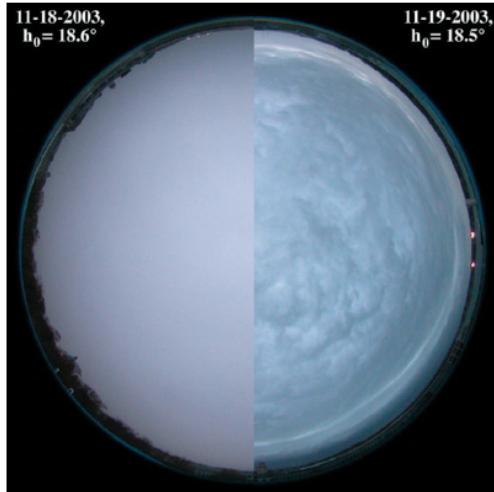


Figura 1.8: Immagine ottenuta con un obiettivo a largo campo raffigurante nella metà di sinistra una nuvola stratiforme e sulla destra uno stratocumulo. Le immagini sono state scattate rispettivamente il 18 e il 19 novembre 2003, con un valore dell’altezza del Sole sull’orizzonte pari a  $18.6^\circ$  e a  $18.5^\circ$ .

a largo campo presenta nella metà di sinistra una nuvola stratiforme e nella metà di destra uno stratocumulo. Entrambi i cieli sono stati fotografati ad Annapolis (nel Maryland<sup>13</sup>) rispettivamente il 18 novembre 2003 e il 19 novembre 2003, attraverso una macchina fotografica digitale. Lo spostamento tra i colori delle due immagini è reale perché è stato usato lo stesso bilanciamento del bianco<sup>14</sup>. Si osservi che lo stratocumulo è più “blu” rispetto allo strato; inoltre, l’intensità di radiazione dello stratocumulo è pari a  $\simeq 3.6 \text{ W m}^{-2}$ , valore nettamente inferiore all’intensità di radiazione dello strato (pari a  $24.3 \text{ W m}^{-2}$ ). Quindi per lo stratocumulo, dove è avvenuto un assorbimento maggiore di intensità luminosa, *si osserva* un cielo più blu. Ultima osservazione: le fotografie sono state effettuate quando il Sole si trovava alla stessa altezza  $h_0$  rispetto all’orizzonte; difatti un differente valore di  $h_0$  modifica la temperatura di colore del cielo stesso (si confronti la sezione 1.4.1). In particolare,abbiamo che il cielo di sinistra è stato scattato con  $h_0 = 18.6^\circ$ , mentre il cielo di destra è stato preso quando  $h_0$  risultava pari a  $18.5^\circ$ .

Queste misure confermano che il cielo nuvoloso sia più blu di un cielo sereno; vediamo ora come questo corrisponda ad una temperatura di colore superiore.

<sup>12</sup>Si confronti [10].

<sup>13</sup>Presso l’USNA (*U.S. Naval Academy*).

<sup>14</sup>Il bilanciamento del bianco (o *white balance*) è un processo che consente di rimuovere i colori non realistici dalle fotografie, in modo tale che gli oggetti che appaiono bianchi per l’occhio umano siano resi bianchi anche in fotografia. Il *white balance* deve tenere conto della temperatura di colore della fonte di luce.

## 1.4 Temperatura di colore

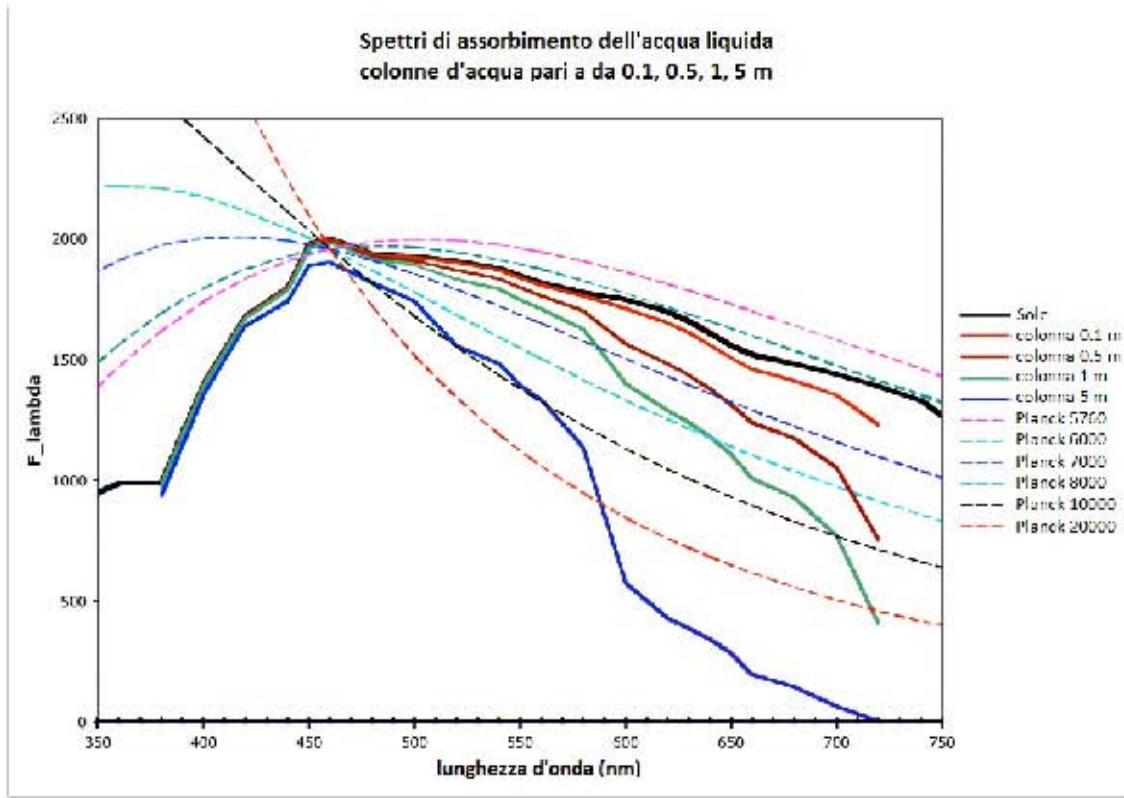


Figura 1.9: Spettri di assorbimento: in rosso lo spettro di assorbimento con una lunghezza di assorbimento  $l$  pari a 10 cm, in porpora uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 0.5 m, in celeste uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 1 m, infine in blu uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 5 m. In nero lo spettro del Sole senza assorbimento. Le linee tratteggiate rappresentano i fit dello spettro di Planck con differenti temperature di colore.

In figura 1.9 sono raffigurati degli spettri di corpo nero in funzione della lunghezza d'onda: in particolare sono rappresentati in linea continua nera lo spettro del Sole e con linee continue di differenti colori degli spettri di assorbimento associati a differenti lunghezze di assorbimento (che variano tra  $l = 10$  cm e  $l = 5$  m). Le curve di assorbimento sono state ricavate applicando la legge di assorbimento (eq. 1.3) allo spettro senza assorbimento del Sole (di intensità  $I_0$ )

$$I = I_0 \exp(-\mu_\alpha l) .$$

Le linee tratteggiate indicano i fit dello spettro di Planck con differenti temperature di colore. Si può facilmente constatare che all'aumento della lunghezza di assorbimento  $l$  corrisponde un aumento della temperatura di colore. In particolare, nella simulazione di figura 1.9 in cui la temperatura di colore del Sole è stata posta pari a 6000 K, abbiamo che le temperature di colore salgono fino ad un valore pari a 20000 K. Per un approfondimento rimandiamo alle analisi conclusive del lavoro (capitolo 4). Un ultima considerazione: se si presentano in cielo nubi con una bassa densità di acqua, ne consegue che avranno uno spettro uguale a quello del Sole.

### 1.4.1 Variazione della temperatura di colore in funzione di $h_0$

C'è un'ulteriore osservazione da fare: sappiamo<sup>15</sup> infatti che la temperatura di colore si modifica al variare dell'altezza  $h_0$  del Sole rispetto all'orizzonte per via del contributo della radiazione di Rayleigh, che diventa predominante per i bassi valori di  $h_0$ ; la figura 1.10 mostra la dipendenza da  $h_0$  della temperatura di colore correlata (CCT) per un cielo sereno e per un cielo nuvoloso.

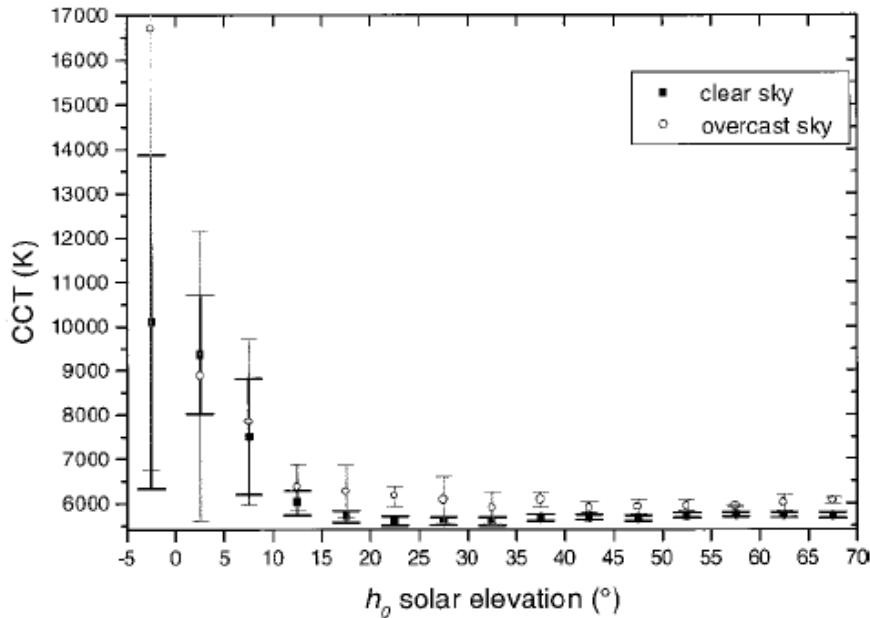


Figura 1.10: Variazione della temperatura di colore correlata (CCT) in funzione dell'angolo  $h_0$ .

Il valor medio della CCT per il cielo nuvoloso è maggiore di quello per il cielo sereno (avvalorando quanto già detto in sezione 1.4). La figura 1.10 mostra anche che né il cielo sereno né il cielo nuvoloso hanno un valor medio significativo per piccoli valori di  $h_0$  (cioè vicino e durante il crepuscolo), perché la varianza di CCT è troppo alta (un approfondimento della trattazione per piccoli  $h_0$  viene rimandata in sezione 3.8.2).

I dati di figura 1.10 sono stati presi durante l'arco di un intero anno presso la città di Granata. Anche se una *survey* annuale non può considerarsi esaustiva, è comunque particolarmente interessante in quanto non si sono viste grosse differenze nell'andamento di CCT.

<sup>15</sup>Si confronti [7].

## 1.5 Random walk

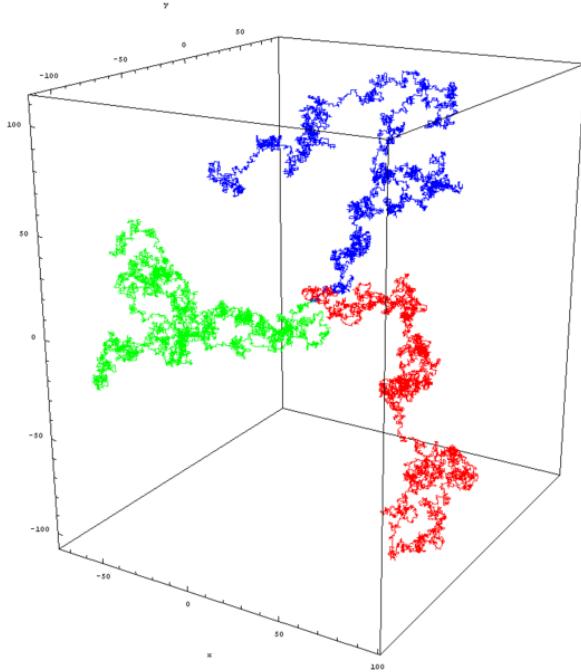


Figura 1.11: Tre cammini (in rosso, in blu e in verde) di *random walk* in ambiente tridimensionale.

Nel nostro lavoro di tesi vogliamo attribuire la mancanza di rosso presente in un cielo nuvoloso all'assorbimento selettivo dovuto alle particelle d'acqua presenti all'interno delle nubi. Nella sezione precedente abbiamo mostrato qualitativamente attraverso i grafici di figura 1.7 che per poter apprezzare l'effetto di assorbimento del rosso serve un mezzo costituito da 1–2 metri di spessore d'acqua. Quello che dobbiamo capire è *se* abbiamo un numero sufficiente di gocce d'acqua nelle nubi in modo tale da ottenere lo spessore necessario per osservare l'effetto. Nel capitolo successivo introdurremo dei modelli che ci consentono di quantificare, date le dimensioni di una goccia d'acqua e date le dimensioni della nube stessa, lo spessore attribuibile ad una nube con le suddette caratteristiche. Per il momento prendiamo in considerazione i dati di figura 1.12 forniti dal sensore MODIS<sup>16</sup> del veicolo spaziale meteorologico NASA chiamato Terra.

L'immagine fornisce come esempio i dati relativi al 06 Gennaio 2006, riportando la mappa del valore  $T$  dell'acqua precipitata totale<sup>17</sup> a varie latitudini e longitudini; sono dati significativi perché non ci sono state variazioni negli anni che hanno modificato l'ordine di grandezza di tale spessore. I dati attestano sull'ordine del centimetro il valore dell'acqua totale precipitata, ma abbiamo già osservato (figura 1.7) che uno spessore di tale ordine non consente un assorbimento tale da giustificare il colore che si osserva in presenza di un cielo nuvoloso.

<sup>16</sup>Per maggiori informazioni sul sensore si veda [https://lpdaac.usgs.gov/lpdaac/products/modis\\_overview](https://lpdaac.usgs.gov/lpdaac/products/modis_overview), per le immagini si veda [http://modis-atmos.gsfc.nasa.gov/MOD05\\_L2/sample.html](http://modis-atmos.gsfc.nasa.gov/MOD05_L2/sample.html)

<sup>17</sup>Altrimenti detto *total precipitable water*.

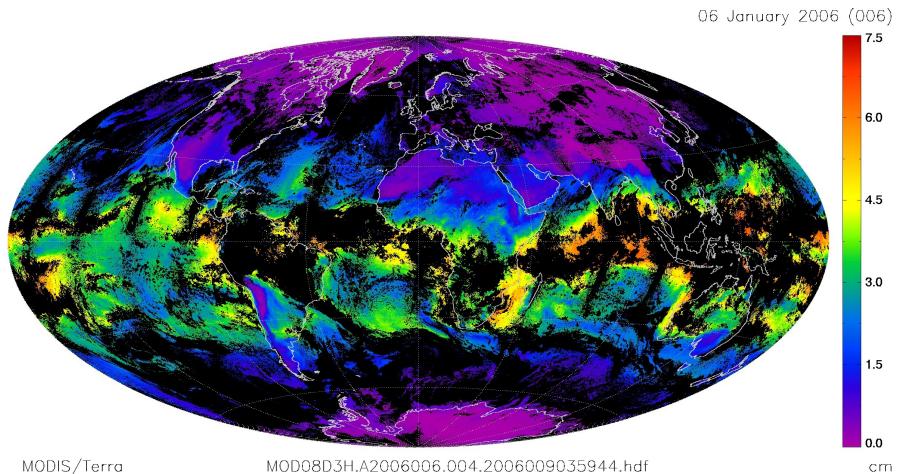


Figura 1.12: Acqua totale precipitata.

La nostra idea è quella di giustificare un maggior spessore dell'acqua attraverso un procedimento di *random walk* del fotone: esso infatti, attraverso dei fenomeni di riflessione e rifrazione, non passerà nella nube senza modificare il suo tragitto, e la nostra stima (sopportata da una simulazione in C mostrata nel capitolo 3) è che lo scattering multiplo che il fotone esegue dentro una nube è possibile che corrisponda ad una colonna d'acqua equivalente ad almeno 1 – 2 m di acqua.

Il lavoro si concluderà mostrando un confronto tra le misure ottenute attraverso il nostro modello e delle misure sperimentali (capitolo 4).

# Capitolo 2

## Modelli matematici

L'obiettivo di questo capitolo è quello di introdurre un modello ragionevole di *random walk* per descrivere il cammino della luce all'interno delle nubi. Con questo modello si potrà verificare se tale cammino raggiunge gli 1 – 2 metri stimati nella sezione 1.3 che consentono di riuscire ad osservare una perdita nel rosso all'interno dello spettro della luce solare.

È possibile descrivere il movimento del fotone come un *random walk*. Prendiamo in considerazione una nube contenente al suo interno delle gocce d'acqua di diametro<sup>1</sup>  $d$ ; nell'attraversare la nube il fotone incontrerà  $N$  gocce d'acqua ( $N$  è quindi il numero medio d'interazioni del fotone nella nube), e per ogni interazione il fotone cambierà direzione di propagazione. Assumiamo che gli spostamenti subiti dal fotone dopo ogni collisione siano statisticamente indipendenti e indichiamo con  $l_i$  la componente  $x$  dello spostamento  $i$ -esimo del fotone. Se il fotone subisce la prima interazione in  $x = 0$ , la componente  $x$  della sua posizione dopo un numero  $N$  di spostamenti è data da

$$x = \sum_{i=1}^N l_i .$$

Calcoliamo il valor medio. Data la natura casuale della direzione di ogni spostamento, si ha che  $\bar{l}_i = 0$ , da cui risulta  $\bar{x} = 0$ . D'altra parte facendo il quadrato del valor medio dello spostamento otteniamo

$$\bar{x^2} = \sum_i \bar{l_i^2} + \sum_{i \neq j} \sum_j \bar{l_i l_j} . \quad (2.1)$$

Dato che gli spostamenti sono statisticamente indipendenti, abbiamo

$$\bar{l_i l_j} = \bar{l_i} \bar{l_j} = 0 ,$$

per cui l'eq. (2.1) diventa

$$\bar{x^2} = \sum_i \bar{l_i^2} = N \bar{l_x^2} . \quad (2.2)$$

Chiamando  $D$  la radice dello spostamento quadratico medio ( $D = \sqrt{\bar{x^2}}$ ) e facendo la radice dell'eq. (2.2), otteniamo

$$D = \sqrt{N} l . \quad (2.3)$$

dove  $l$  assume il valore di libero cammino medio e  $N$  è il numero medio di interazioni del fotone nella nube.

---

<sup>1</sup>Una goccia d'acqua può essere descritta con geometria sferica.

Per valutare l'assorbimento nel rosso da parte delle nubi, dobbiamo dare una stima della profondità ottica media  $W$  della traiettoria del nostro fotone definita come

$$W = Nd . \quad (2.4)$$

Nella prossima sezione 2.1 partiremo da un semplice modello attraverso il quale calcoleremo il numero di interazioni medio  $N$  attraverso il quale valuteremo  $W$ . Nelle sezioni successive (dalla sezione 2.2 alla sezione 2.4) complicheremo via via il modello ottenendo una descrizione sempre più realistica del sistema fisico trattato.

## 2.1 Approssimazione sferica

Sia  $L$  la dimensione caratteristica della nube<sup>2</sup>; il cammino medio nella nube  $D$  sarà dell'ordine di  $L$ :

$$D \sim L . \quad (2.5)$$

Definiamo  $l \simeq 1/n\sigma$  il libero cammino medio del fotone<sup>3</sup>,  $n$  la densità di particelle d'acqua (di cui daremo la formula più avanti),  $R$  il raggio della goccia d'acqua e  $\sigma$  la sezione d'urto (classica) della goccia come

$$\sigma = \pi R^2 ; \quad (2.6)$$

nell'ipotesi di *random walk* possiamo riscrivere l'eq. (2.3)

$$D = \sqrt{N} l . \quad (2.7)$$

Unendo le eq. (2.5) e (2.7) si ottiene

$$N \simeq \left( \frac{L}{l} \right)^2 . \quad (2.8)$$

Da  $N$  posso ricavare così  $W$  (si confronti l'eq. 2.4).

Per eseguire i conti e ottenere così una prima stima di  $W$ , consideriamo una sezione d'acqua di sezione  $A$  e altezza  $L$ ; il volume di tale sezione sarà pari a  $V = L A$ .

Definiamo un parametro corrispondente all'acqua totale precipitata  $T$  nel seguente modo<sup>4</sup>:

$$T = n \frac{4}{3} \pi R^3 L . \quad (2.9)$$

Il numero di particelle  $N_{part}$  sarà pari a

$$N_{part} = \frac{T A}{\frac{4}{3} \pi R^3} ,$$

da cui otteniamo la densità:

$$n = \frac{N_{part}}{V} . \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>Prendendo  $L$  come unica dimensione caratteristica segue che possiamo considerarci nell'ipotesi di approssimazione sferica.

<sup>3</sup>Trascuriamo i fattori numerici che moltiplicano  $\frac{1}{n\sigma}$ .

<sup>4</sup>Rimandiamo ad ulteriori dettagli sul parametro  $T$  nella sezione 3.6.2.

Quindi per le eq. (2.6) e (2.10) il libero cammino medio può essere riscritto come

$$l \simeq \frac{1}{n\sigma} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 L}{T\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3}RL}{T} .$$

Richiamando la (2.8) si ricava

$$N \simeq \left( \frac{3}{4} \frac{T}{R} \right)^2 , \quad (2.11)$$

e si arriva infine a  $W$ :

$$W \simeq d \left( \frac{3}{4} \frac{T}{R} \right)^2 = \frac{9}{8} \frac{T^2}{R} . \quad (2.12)$$

Sapendo che una goccia d'acqua ha dimensioni tipiche<sup>5</sup> di 0.02 mm, e ponendo  $T = 1$  cm si ottiene  $N \simeq 562500$  e  $W \simeq 11.25$  m.

Considerando invece una goccia di grande dimensioni (0.4 mm) e prendendo lo stesso valore di  $T$  otteniamo  $N \simeq 1406$  e  $W \simeq 0.56$  m. Riassumendo in tabella:

| $T$<br>(cm) | $d = 2R$<br>(mm) | $N$    | $W$<br>(m) |
|-------------|------------------|--------|------------|
| 1           | 0.02             | 562500 | 11.25      |
| 1           | 0.4              | 1406   | 0.56       |

Alcune osservazioni:

- Si noti che nel valutare  $N$  nella (2.11) scompare la dipendenza dalla dimensione caratteristica della nube  $L$ . Questo accade perché tale dipendenza è stata racchiusa all'interno della variabile  $T$ ; richiamiamo l'equazione di  $T$  (2.9) per evidenziare il fatto:

$$T = n \frac{4}{3} \pi R^3 L .$$

Quindi se siamo a conoscenza del parametro  $T$  *non* abbiamo bisogno di sapere le dimensioni della nube che stiamo studiando.

All'interno di questo lavoro di tesi abbiamo preso il valore di  $T$  attraverso le misure effettuate dal satellite Terra; si confronti la sezione 3.6.2 per un'accurata descrizione del satellite e per ulteriori informazioni su  $T$ .

- Nella stessa formula si vede che l'andamento di  $N$  va come l'inverso del quadrato del raggio. Per poter osservare il fenomeno fisico di assorbimento dello spettro siamo quindi interessati a delle gocce d'acqua con piccole dimensioni, perché un basso  $R$  aumenta il numero di interazioni  $N$  e aumenta così  $W$ . L'osservazione è valida solo nell'ipotesi di  $T$  costante; se infatti mantenessimo costante  $W$  varrebbe l'inverso.

---

<sup>5</sup>Si confronti la sezione 3.6.3.

Concludiamo la sezione migliorando la stima di  $W$  di eq. (2.12).

Consideriamo in un ambiente bidimensionale una goccia d'acqua e dei fotoni incidenti su di essa e paralleli tra loro<sup>6</sup>.

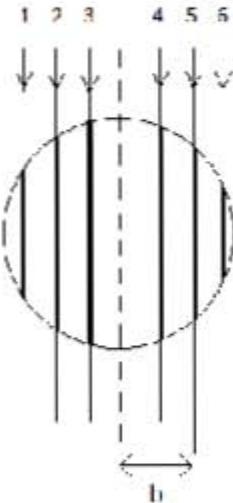


Figura 2.1: Calcolo di  $W$ .

Chiediamoci quale sia il valor medio del percorso che i raggi compiono all'interno della goccia. In figura 2.1 abbiamo lo schema della situazione fisica immaginata: la linea tratteggiata è l'asse della goccia parallelo alla direzione dei fotoni; i fotoni, numerati da 1 a 6, sono rappresentati con rette continue e con una freccia che indica il loro verso. Sia  $b$  il parametro d'impatto<sup>7</sup>: il valor medio di  $W$  sarà pari a

$$\langle \Delta z \rangle = \frac{\int_0^R \Delta z(b) db}{2 \int_0^R db} = \frac{\int_0^R \Delta z(b) db}{2r} . \quad (2.13)$$

Estendiamo il calcolo ad un ambiente tridimensionale: l'eq. (2.13) diventerà

$$\langle \Delta z \rangle = \frac{\int_0^R \Delta z(b) d^2b}{\pi R^2} . \quad (2.14)$$

Il numeratore dell'eq. (2.14) è pari al volume della goccia d'acqua, di conseguenza l'espressione diventa

$$\langle \Delta z \rangle = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{4}{3}R . \quad (2.15)$$

Poiché nella precedente stima di  $W$  (eq. 2.12) abbiamo utilizzato  $2R$ , e poiché in eq. 2.15 abbiamo trovato  $4/3 R$ , la nuova stima di  $W$  si troverà moltiplicando la precedente per

$$\frac{\frac{4}{3}R}{2R} .$$

<sup>6</sup>Per il momento non stiamo considerando che nel passaggio tra aria e acqua avvengono riflessione e rifrazione, ma il calcolo che faremo ora sarà consistente anche dopo aver introdotto le proprietà cinematiche della luce. La presentazione di tali proprietà viene rimandata alle sezioni 2.3.1 e 2.3.2

<sup>7</sup>Il parametro di impatto, definito per ogni fotone, è la distanza tra l'asse della goccia e il fotone stesso. È quindi definito con valori che vanno tra 0 e il raggio della goccia  $R$ ).

Riportiamo la nuova stima di  $W$ :

| $T$<br>(cm) | $d = 2R$<br>(mm) | $N$    | $W$<br>(m) |
|-------------|------------------|--------|------------|
| 1           | 0.02             | 562500 | 7.5        |
| 1           | 0.4              | 1406   | 0.37       |

## 2.2 Approssimazione piana

Riformuliamo il calcolo di  $W$  introducendo l'ipotesi di nube piana:

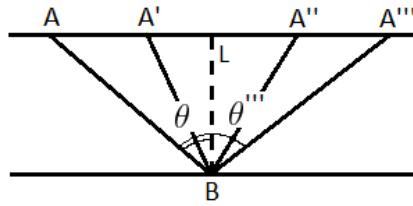


Figura 2.2: Nube in approssimazione piana.

In figura 2.2 è descritta la nuova situazione: le due righe orizzontali rappresentano i confini verticali della nube; il punto  $B$  è il punto in cui poniamo l'osservatore, mentre i punti  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  e  $A'''$  sono i punti da cui sono partiti i fotoni che, dopo aver fatto *random walk*, sono giunti all'osservatore.  $L$  e  $D$  continuano a indicare rispettivamente la dimensione della nube e la distanza media percorsa da esso; si noti infine che  $\theta$  è l'angolo tra la normale alla nube (tratteggiata in figura) e il segmento che congiunge  $B$  ad  $A$ .

Per calcolare  $N$  (e quindi successivamente  $W$ ) utilizzeremo le formule della sezione 2.1; l'unica espressione che va modificata è quella per cui  $D \sim L$ , che diventerà<sup>8</sup>

$$D \sim \frac{L}{\cos \theta} .$$

$N$  risulterà pari a

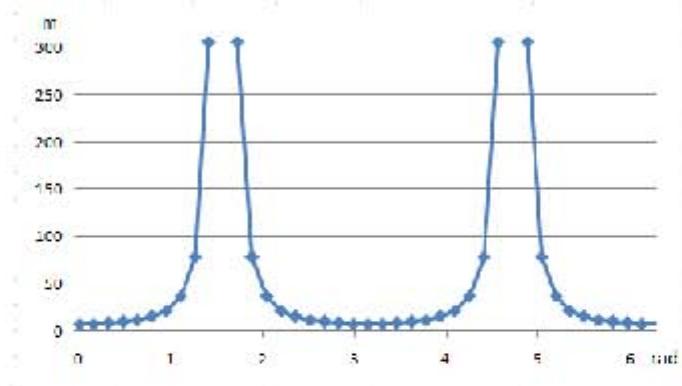
$$N = \left( \frac{3}{4} \frac{T}{R \cos \theta} \right)^2 . \quad (2.16)$$

Per ottenere  $W$  moltiplicheremo  $N$  per  $d$  come in (2.4).

Le osservazioni fatte in approssimazione sferica sono ancora valide ( $N$  non dipendente da  $L$ ,  $W$  aumenta al diminuire della dimensione delle gocce d'acqua).

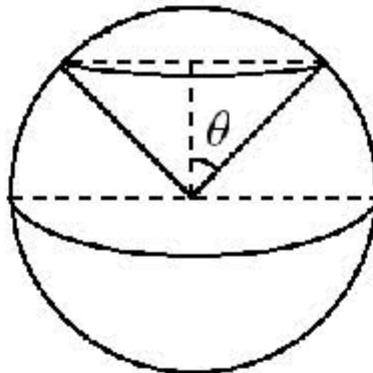
In figura 2.3 viene riportato il variare di  $W$  in metri in funzione dell'angolo di ingresso  $\theta$  prendendo  $d = 0.02$  mm,  $T = 1$  cm:

<sup>8</sup>Stiamo assumendo senza giustificazioni che l'estensione da modello sferico a modello in approssimazione piana possa essere nuovamente trattato per mezzo di un *random walk*.

Figura 2.3: Valore di  $W$  in metri in funzione dell'angolo  $\theta$ 

### 2.2.1 Distribuzione uniforme

Dopo aver fatto il conto su un  $\theta$  particolare, rieseguiremo i calcoli studiando il caso medio su tutti gli angoli. Per fare questo è necessario calcolare la distribuzione in  $\theta$ . Per calcolarla prendiamo una sfera (che rappresenta la Terra) in cui  $\theta$  è la colatitudine.



La distribuzione sarà uniforme sulla semisfera e seguirà un andamento sinusoidale; normalizzandola si ottiene che

$$P_\theta(\theta) = \sin \theta .$$

Calcoliamo ora il valor medio del numero di interazioni  $N(\theta)$  utilizzando la (2.16):

$$\langle N \rangle = \int P(\theta) N(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \left( \frac{3}{4} \frac{T}{R \cos \theta} \right)^2 d\theta .$$

Per angoli pari a  $\pi/2$  l'integrale non è definito; possiamo però non considerare tale valore estremo perché una colatitudine di  $\pi/2$  implicherebbe una nube di dimensione orizzontale infinita.

Proseguendo la risoluzione dell'integrale:

$$\langle N \rangle = - \left( \frac{3T}{4R} \right)^2 \int_1^0 \frac{1}{x^2} dx = \left( \frac{3T}{4R} \right)^2 \int_\alpha^1 \frac{1}{x^2} dx,$$

con  $\alpha$  definito come

$$\alpha = \sin \pi/2 - \epsilon,$$

ed  $\epsilon$  preso come una quantità piccola a piacere.

Risolto l'integrale otteniamo:

$$\langle N \rangle = \left( \frac{3T}{4R} \right)^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \quad (2.17)$$

Si noti che la distribuzione ottenuta è fortemente dipendente da  $\alpha$ .

### 2.2.2 Calcolo di $W$ in approssimazione piana: un secondo approccio

C'è una considerazione da fare rispetto ai conti svolti nella sezione 2.2 e nella precedente (2.2.1): consideriamo la figura 2.4 rappresentando diversi percorsi che il fotone esegue seguendo un *random walk*.

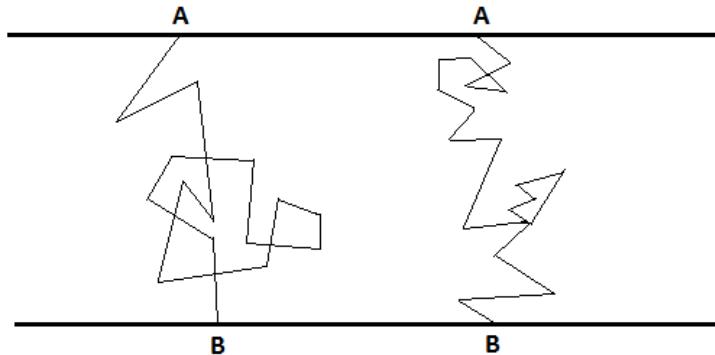
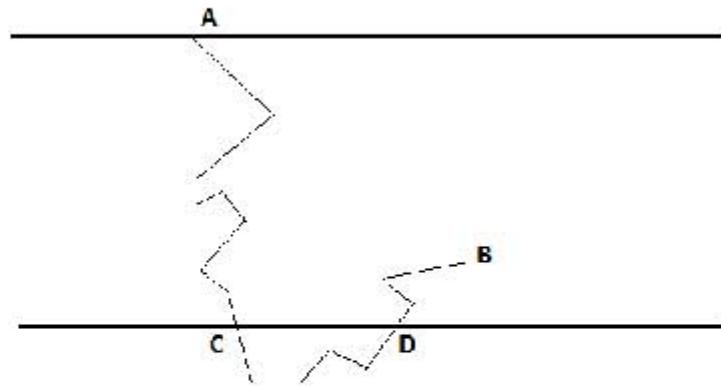


Figura 2.4: Possibili cammini di *Random walk*.

I due cammini hanno ugual lunghezza, e non entrano in conflitto con nessuna delle ipotesi che abbiamo introdotto nelle sezioni 2.2 e 2.2.1, tuttavia se prendiamo in considerazione il *random walk* di figura 2.5, anche in questo caso non creiamo nessun conflitto con le ipotesi introdotte, ma prima del termine del tragitto il fotone è uscito dalla nube (in particolare tra i punti C e D), e ciò rende non realistico il nostro modello. Introduciamo per questo una analisi migliore che rivaluti le nostre approssimazioni.

Figura 2.5: *Random walk*.

Detta  $D_y$  la distanza media e ricordando che  $L$  è la lunghezza caratteristica, vale che  $D_y \simeq L$ , e utilizzando l'eq. (2.3) nel caso unidimensionale (che varia di un fattore  $\sqrt{3}$  rispetto al caso tridimensionale), possiamo scrivere che

$$D_y = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{N}.$$

Di conseguenza la stima di  $W$  di modifica di un fattore  $1/\sqrt{3}$ ); riportiamo le nuove stime della colonna d'acqua  $W$

| $T$<br>(cm) | $d = 2R$<br>(mm) | $N$    | $W$<br>(m) |
|-------------|------------------|--------|------------|
| 1           | 0.02             | 562500 | 4.33       |
| 1           | 0.4              | 1406   | 0.37       |

## 2.3 Traiettoria del fotone nella nube

L'obiettivo di questa sezione è descrivere la fisica che avviene nel passaggio del fotone all'interno della nube. Il fotone modifica il suo tragitto rettilineo ogni qualvolta interagisce con una goccia d'acqua della nube. In particolare si presenterà rifrazione (sezione 2.3.1) e riflessione (sezione 2.3.2).

Come primo passo analizzeremo queste proprietà per una *singola* goccia d'acqua, successivamente si proporranno i risultati di un programma in C che esegue l'analisi del modello per un maggiore numero di gocce (capitolo 3).

### 2.3.1 La rifrazione

Impostiamo il seguente problema: prendiamo una goccia d'acqua di raggio  $R$  e tracciamo un asse della goccia; ora prendiamo un singolo fotone in direzione parallela a tale asse e distante  $b$  da esso (alla distanza  $b$  diamo il nome di parametro d'impatto). Siamo interessati ai casi in cui *ci sia* interazione tra fotone e goccia, per cui poniamo  $b < R$ . Escludiamo per il momento ogni tipo di riflessione. Fissato  $b$  l'uscita è deterministica, ma la distribuzione di  $b$  non è

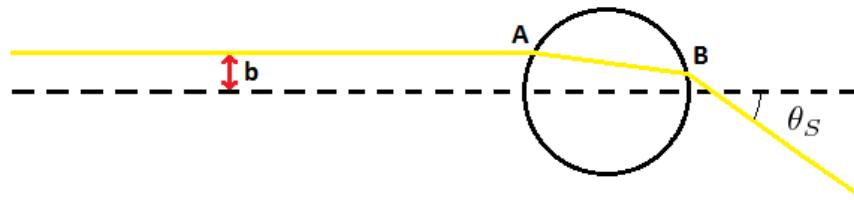


Figura 2.6: fotone incidente su una goccia d'acqua

uniforme. Per calcolare (a  $b$  fissato) l'angolo di uscita  $\theta_S$  dobbiamo capire cosa succede al fotone quando passa attraverso la goccia d'acqua<sup>9</sup>.

Iniziamo analizzando le proprietà cinematiche<sup>10</sup> con semplici considerazioni geometriche, limitandoci a calcolare il tragitto della luce utilizzando le leggi di Snell. Per fare ciò dobbiamo essere a conoscenza degli indici di rifrazione di aria e acqua nelle lunghezze d'onda che ci interessano; focalizziamo l'attenzione per adesso su di una singola lunghezza d'onda (il giallo<sup>11</sup>,  $\lambda \simeq 580$  nm) di modo da avere un singolo indice di rifrazione per l'aria (1.0002926) e un singolo indice di rifrazione per l'acqua<sup>12</sup> (1.33335).

<sup>9</sup>Considerare come angolo di uscita  $\theta_S$  è un approssimazione. Si veda la sezione 3.8.1 per una giustificazione al modello.

<sup>10</sup>Stiamo seguendo la terminologia usata in [9].

<sup>11</sup>Abbiamo usato la suddivisione di colori definita da Craig F. Bohren. Si confronti la figura 1.4 e [1].

<sup>12</sup>l'indice di rifrazione è in funzione anche della temperatura. Qui abbiamo preso i valori corrispondenti ad una  $T = 20$  K come esempio.

Procediamo ora utilizzando la legge di Snell sul punto A e sul punto B in modo da calcolare il tragitto del fotone all'interno della goccia e l'angolo di uscita  $\theta_4$ . Chiamiamo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione nel punto A, rispettivamente. Analogamente chiamiamo  $\theta_3$  e  $\theta_4$  l'angolo di incidenza e l'angolo di rifrazione nel punto B, rispettivamente. Infine chiamiamo  $n_a$  e  $n_w$  gli indici di rifrazione dell'aria e dell'acqua.

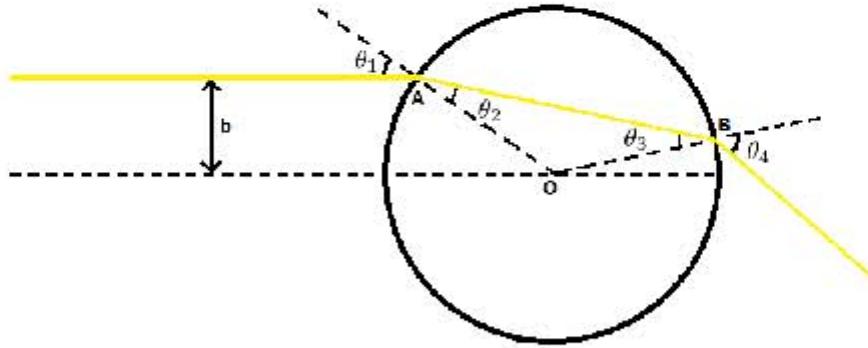


Figura 2.7: Rifrazione di un fotone su di una goccia d'acqua.

Il parametro d'impatto  $b$  può essere scritto come

$$b = R \sin \theta_1 , \quad (2.18)$$

da cui possiamo ottenere  $\theta_1$

$$\theta_1 = \arcsin \left( \frac{b}{R} \right) . \quad (2.19)$$

Applicando la legge di Snell nel punto A avremo

$$n_a \sin \theta_1 = n_w \sin \theta_2 , \quad (2.20)$$

da cui si ottiene che

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{n_a}{n_w} \frac{b}{R} \right) . \quad (2.21)$$

Poiché i segmenti  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  sono raggi, segue che

$$\theta_2 = \theta_3 . \quad (2.22)$$

Applicando la legge di Snell in B e utilizzando l'eq. (2.22) otteniamo

$$n_w \sin \theta_2 = n_a \sin \theta_4 .$$

Unendo questa equazione all'eq. (2.20) otterremo

$$n_a \sin \theta_4 = n_a \sin \theta_1 ,$$

da cui

$$\theta_1 = \theta_4 .$$

Riassumendo abbiamo trovato

$$\theta_1 = \theta_4 = \arcsin\left(\frac{b}{R}\right), \quad (2.23)$$

$$\theta_2 = \theta_3 = \arcsin \left( \frac{n_a}{n_w} \frac{b}{R} \right). \quad (2.24)$$

Calcoliamo l'angolo di uscita, rappresentato in figura 2.8 con il nome di  $\theta_S$ : per fare ciò utilizzeremo semplici considerazioni geometriche.

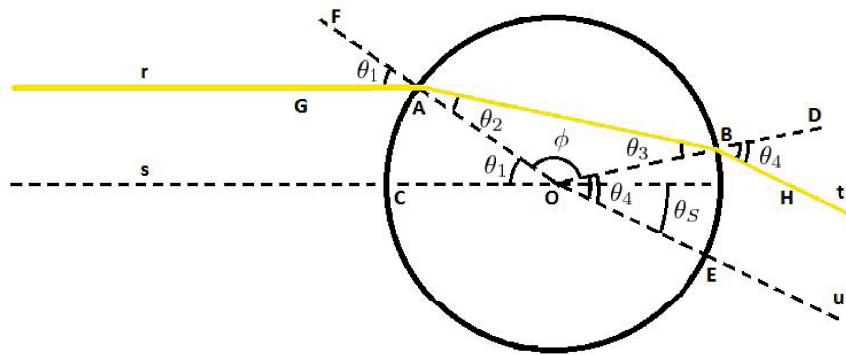


Figura 2.8: Rifrazione di un fotone su di una goccia d'acqua.

Per le eq. (2.23) e (2.24) vale  $\theta_1 = \theta_4$  e  $\theta_2 = \theta_3$ . Poiché le rette  $r$  e  $s$  sono parallele, gli angoli corrispondenti  $F\hat{A}G$  e  $A\hat{O}C$  sono congruenti. Utilizzando considerazioni analoghe si trova che  $D\hat{B}H$  è congruente a  $B\hat{O}E$  (e per l'eq. (2.23) sono congruenti a  $\theta_1$ ). Calcoliamo l'angolo  $A\hat{O}B$  (che chiamiamo  $\Phi$ ) come

$$\Phi = \pi - 2\theta_2 . \quad (2.25)$$

$\theta_S$  sarà quindi pari a

$$\theta_S = 2\theta_1 + \Phi - \pi ,$$

e sostituendo l'equazione di  $\Phi$  (2.25) otteniamo

$$\theta_S = 2(\theta_1 - \theta_2) , \quad (2.26)$$

Nella prossima sezione aggiungeremo la possibilità di una riflessione parziale da parte della luce.

### 2.3.2 La riflessione

Studiamo ora la riflessione da parte dei fotoni su di una goccia d'acqua: per fare ciò, in analogia alla sezione 2.3.1, e prendendo in considerazione la figura 2.9, studiamo una goccia d'acqua di raggio  $R$  e alcuni fotoni posti a differenti distanze<sup>13</sup>  $b$  da un asse ( $x$ ) preso parallelo alla direzione di provenienza dei fotoni. Siamo interessati ai casi in cui *ci sia* interazione tra fotone e goccia, per cui poniamo  $b < R$ . Abbiamo raffigurato un primo fotone (giallo)

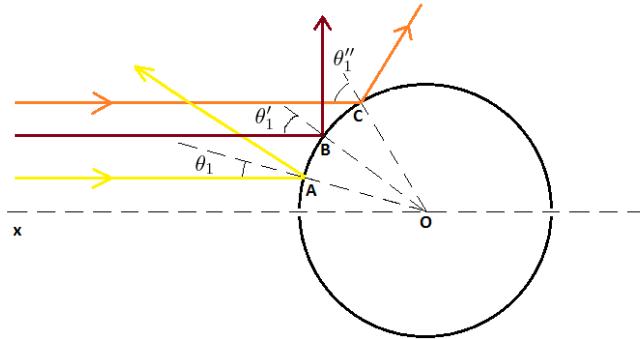


Figura 2.9: Riflessione su di una goccia d'acqua. Il fotone giallo rappresenta tutti i fotoni con  $b < 1/2 R$ , il fotone porpora rappresenta il caso  $b = 1/2 R$ , infine il fotone arancione è rappresentativo dei casi  $1/2 R < b < R$ .

come rappresentativo dei casi in cui si abbia  $b < 1/2 R$ , un secondo fotone (porpora) per rappresentare il caso in cui  $b = 1/2 R$ , e un terzo fotone per i casi  $1/2 R < b < R$ .

Per le proprietà cinematiche della luce<sup>14</sup> l'angolo  $\theta_R$  risulta in ognuno dei tre casi pari a

$$\theta_R = \pi - 2 \theta_1 . \quad (2.27)$$

Il segmento  $\overline{BO}$  in figura 2.10 ha la stessa direzione del fotone riflesso ma è traslato sul centro della goccia d'acqua.  $\theta_R$  è l'angolo tra il segmento  $\overline{BO}$  stesso e l'asse  $x$

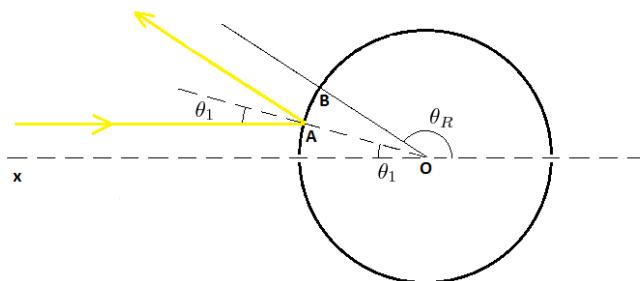


Figura 2.10: Riflessione. Angolo  $\theta_R$ .

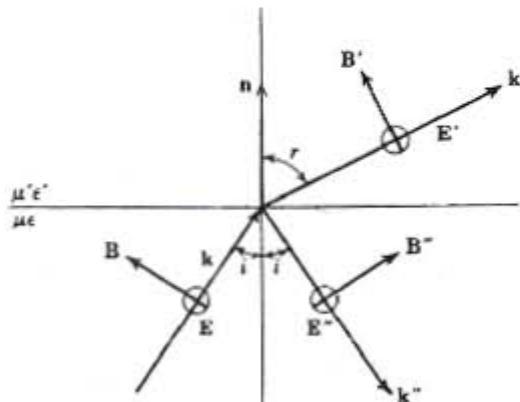
<sup>13</sup> $b$  è il parametro d'impatto. Per la definizione si guardi l'eq. (2.18)

<sup>14</sup>Ci riferiamo in particolare alla proprietà per cui l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza. Si confronti [9] per la terminologia utilizzata.

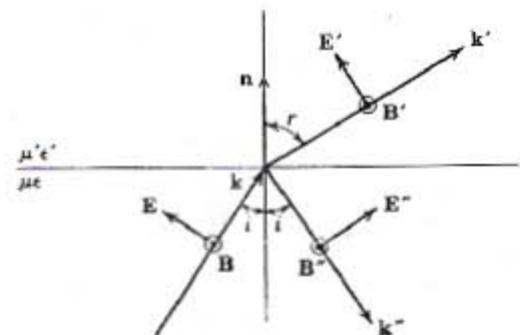
### 2.3.3 Stima della luce riflessa

Per stimare la quantità di luce riflessa  $f_i$  introduciamo le proprietà dinamiche della luce:

- intensità del fascio riflesso e riferito
- cambiamenti di fase e di polarizzazione



(a)



(b)

Figura 2.11: Riflessione e rifrazione con polarizzazione perpendicolare (a) e parallela (b) al piano d'incidenza

Le onde incidenti, rifratte (indicate con un apice) e riflesse (indicate con due apici) sono:

incidente:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \exp^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B} &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{E}}{k}\end{aligned}\quad (2.28)$$

rifratta:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E}'_0 \exp^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B}' &= \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\mathbf{K}' \times \mathbf{E}'}{k'}\end{aligned}\quad (2.29)$$

riflessa:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'' &= \mathbf{E}''_0 \exp^{i\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \\ \mathbf{B}'' &= \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\mathbf{K}'' \times \mathbf{E}''}{k}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Le proprietà dinamiche sono contenute nelle condizioni al contorno per i campi: continuità delle componenti ortogonali di  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$ , e delle componenti tangenti di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$ ; utilizzando (2.3.3) (2.3.3) e (2.3.3):

$$\begin{aligned}[\epsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0) - \epsilon' \mathbf{E}'_0] \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0 - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0] \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}''_0 - \mathbf{E}'_0) \times \mathbf{n} &= 0\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0) - \frac{1}{\mu'} (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0) \right] \times \mathbf{n} = 0$$

Consideriamo separatamente due situazioni: la prima, in cui l'onda piana incidente è polarizzata linearmente col vettore di polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza (piano definito da  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{n}$ ), e la seconda, in cui il vettore di polarizzazione è parallelo al piano di incidenza.

Per  $\mathbf{E}$  perpendicolare al piano di incidenza si ha:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos i}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} \quad (2.31)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{n \cos i - \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}{n \cos i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} \quad (2.32)$$

dove  $i$  è l'angolo di incidenza (si confronti (2.11)); per  $\mathbf{E}$  parallelo al piano di incidenza si ha:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2nn' \cos i}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} \quad (2.33)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i - n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos i + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 i}} \quad (2.34)$$

Per incidenza normale ( $i = 0$ ) le eq.(2.31 - 2.33) si riducono entrambe a

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1} \rightarrow \frac{2n}{n' + n} \quad (2.35)$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon} - 1}}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{\mu'\epsilon}} + 1} \rightarrow \frac{n' - n}{n' + n} \quad (2.36)$$

dove le espressioni a destra valgono per  $\mu' = \mu$ <sup>15</sup>.

riportiamo in figura i valori di  $E''_0/E_0$  (a cui associamo la lettera  $f$ ) per  $E$  perpendicolare al piano d'incidenza e per  $E$  parallelo al piano d'incidenza:

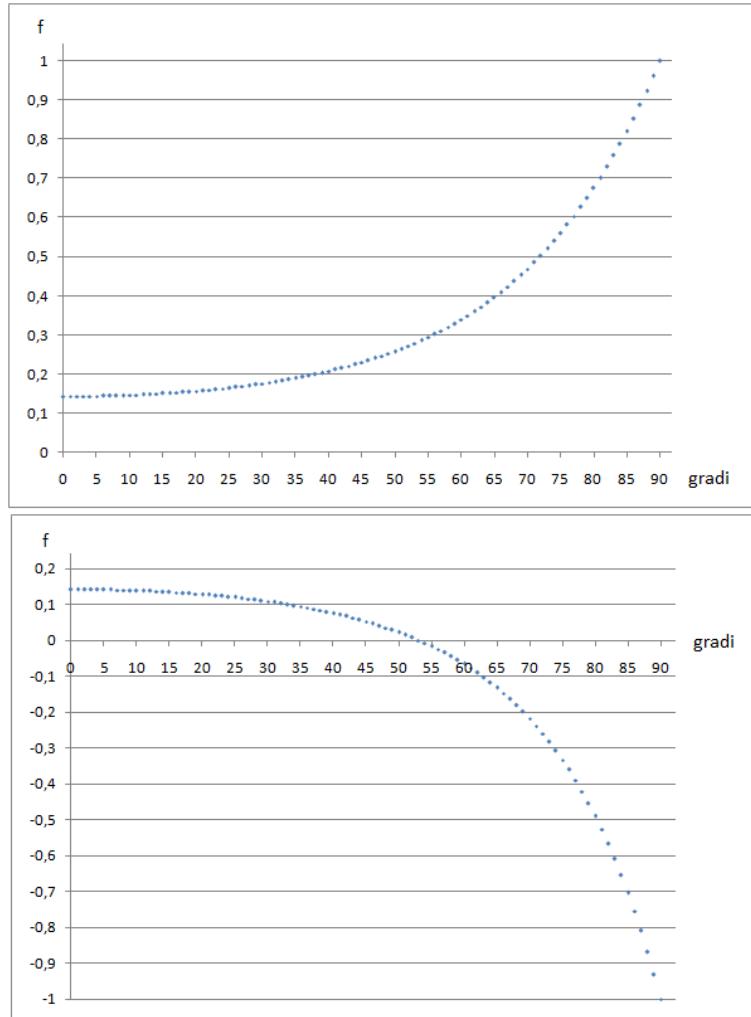


Figura 2.12: Porzione di luce riflessa in funzione dell'angolo. Nel grafico superiore si riportano i dati per  $E$  perpendicolare al piano d'incidenza, nel grafico inferiore si riportano i dati con  $E$  parallelo al piano d'incidenza. Si confronti [12].

Nella prossima sezione passeremo da  $f$ , che è il rapporto tra campo riflesso e campo incidente, a  $f_i$ , che indica la quantità di luce riflessa. Valutare  $f_i$  è importante per stabilire la probabilità che un fotone incidente su di una goccia d'acqua subisca riflessione o rifrazione.

<sup>15</sup>Per frequenze ottiche è generalmente possibile porre  $\frac{\mu}{\mu'} = 1$ .

### 2.3.4 Le formule di Fresnel

Nel caso in cui sia interessati solamente alla potenza trasmessa e alla potenza riflessa, è possibile sostituire i calcoli della sezione 2.3.3 con i coefficienti di Fresnel; detto  $i$  l'angolo d'incidenza,  $n_1$  e  $n_2$  gli indici di rifrazione dei due mezzi, allora gli indici di riflessione  $R_{\perp}$  e  $R_{//}$  per la componente di polarizzazione ortogonale al campo  $E$  e parallela al campo  $E$  sono

$$R_{\perp} = \left[ \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2}} \right]^2 \quad (2.37)$$

$$R_{//} = \left[ \frac{n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2} - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i)^2} + n_2 \cos \theta_i} \right]^2 \quad (2.38)$$

### 2.3.5 Calcolo della quantità di luce riflessa e rifratta

Chiamiamo  $I$  l'intensità incidente (unitaria) e poniamo per ipotesi  $E_0 = 1$ . Prendendo un sistema di assi cartesiani in cui l'asse  $z$  coincida con la direzione di propagazione del fotone, abbiamo che il campo  $E_0$  può essere scritto come

$$E_0 = \hat{x} E_0^{//} + \hat{y} E_0^{\perp} . \quad (2.39)$$

In particolare avremo che

$$E_0^{//} = E_0 \cos \alpha ,$$

e

$$E_0^{\perp} = E_0 \sin \alpha ,$$

con  $\alpha$  appartenente all'intervallo  $[0; 2\pi]$ . Considerando l'eq. (2.32) per  $E$  (riflesso) perpendicolare al campo d'incidenza e l'eq. (2.34) per  $E$  (riflesso) parallelo al campo d'incidenza, e chiamandole rispettivamente  $E_{rifl}^{//}$  e  $E_{rifl}^{\perp}$ , abbiamo che il campo riflesso, per l'eq. (2.39), è pari a

$$E_{rifl} = \hat{x} E_{rifl}^{//} + \hat{y} E_{rifl}^{\perp} .$$

L'intensità finale uscente  $I_f$  sarà proporzionale al quadrato del campo riflesso

$$I_f \propto E_{rifl}^2 .$$

Quindi la probabilità  $f_i$  che nell'interazione con la goccia d'acqua il fotone subisca una riflessione è pari a

$$f_i = (E_{rifl}^{//})^2 + (E_{rifl}^{\perp})^2 , \quad (2.40)$$

e di conseguenza la probabilità che il fotone venga rifratto è pari a

$$1 - f_i . \quad (2.41)$$

Le equazioni (2.40) e (2.41) verranno utilizzate nel capitolo 3 all'interno del codice sviluppato in linguaggio C attraverso il quale si stimerà l'assorbimento del rosso all'interno delle nubi.

### 2.3.6 Miglioramento della stima della profondità ottica media

Per migliorare la stima della profondità ottica media possiamo, alla luce di quanto detto nelle sezioni 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.5, introdurre un nuovo accorgimento: infatti nelle precedenti stime di  $W$  non si era ancora tenuto conto del fatto che nell'interazione con l'acqua il fotone può subire riflessione o rifrazione, e che c'è assorbimento solo se si presenta rifrazione<sup>16</sup>.

Prendiamo il caso di incidenza normale (eq. 2.35); il quadrato del campo mi darà la probabilità di intensità rifratta con cui andremo a modificare  $W$ . Prendendo come indice di rifrazione dell'aria  $n_a = 1.0002926$  e come indice di rifrazione dell'acqua  $n_w = 1.334$ , abbiamo

$$\frac{4n_a^2}{(n_w + n_a)^2} = 0.7345 \quad (2.42)$$

quindi le stime di  $W$  diventano

| $T$<br>(cm) | $d = 2R$<br>(mm) | $N$    | $W$<br>(m) |
|-------------|------------------|--------|------------|
| 1           | 0.02             | 562500 | 3.160      |
| 1           | 0.4              | 1406   | 0.155      |

Nella prossima sezione introdurremo le proprietà delle riflessioni interne. Attraverso di esse, e con l'ausilio della trattazione della rifrazione (sezione 2.3.1) e della riflessione<sup>17</sup> (di sezione 2.3.2), porteremo a termine la descrizione delle proprietà cinematiche della luce.

### 2.3.7 Riflessioni interne

Nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2 abbiamo descritto rispettivamente le condizioni in cui un fotone viene rifratto e riflesso sulla superficie di una goccia d'acqua; in questa sezione aggiungiamo la trattazione delle riflessioni che possono avvenire *all'interno* della goccia.

Consideriamo un fotone incidente su di una goccia d'acqua (si confronti in figura 2.13 il punto A), e ipotizziamo che subisca rifrazione<sup>18</sup>. Giunto nel punto B il fotone può rifrangere e uscire dalla goccia, oppure subire una riflessione interna. Ipotizziamo che il fotone venga riflesso: esso rimarrà dentro alla goccia e modificherà il suo tragitto di un angolo pari a  $\pi - 2\theta_2$  rispetto alla direzione di provenienza, proseguendo nel suo cammino fino ad arrivare al punto C. Nel punto C il fotone potrà subire nuovamente una riflessione interna, modificando il suo tragitto di un angolo  $\pi - 2\theta_2$  rispetto alla direzione di provenienza, o essere rifratto. Generalizzando, l'angolo  $\theta_N$  di riflessione interna rispetto alla direzione del fotone rifratto dopo  $N$  riflessioni interne compiute è pari a

$$\theta_N = N(\pi - 2\theta_2) .$$

Chiediamoci ora: dopo quante interazioni il fotone uscirà dalla goccia d'acqua mediante rifrazione? In altre parole, qual è la probabilità che continuino ad avvenire riflessioni interne? Avvalendoci dei risultati di sezione 2.3.5 possiamo dire che la probabilità che avvengano riflessioni interne aumentano con la potenza di  $f_i$ ; infatti, nella sezione menzionata abbiamo descritto che il fotone ha probabilità  $f_i$  di subire riflessione e probabilità  $1 - f_i$  di subire rifrazione; ipotizziamo che il fotone abbia subito rifrazione e si trovi all'interno della goccia, allora non appena raggiunge nuovamente il confine tra acqua e aria esso avrà una probabilità di riflettersi all'interno della goccia pari a  $(f_i)^2$ , e una probabilità di rifrangersi pari a  $1 - (f_i)^2$ .

<sup>16</sup>Si confrontino [2], [10].

<sup>17</sup>Esterna.

<sup>18</sup>La probabilità con cui questo fenomeno avviene è pari a  $1 - f_i$ . Si confronti 2.3.5.

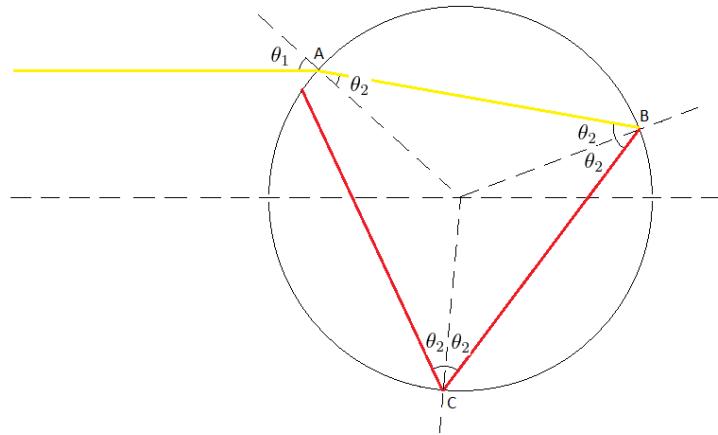


Figura 2.13: Le riflessioni interne avvengono nei punti B e C; il tragitto del fotone riflesso è rappresentato in rosso.

Estendendo il ragionamento a  $N$  possibili riflessioni interne, la probabilità  $P$  che avvenga l' $N$ -esima riflessione interna è pari a

$$P = (f_i)^N .$$

Alcune osservazioni:

- Tutte le riflessioni interne avvengono su un unico piano: questo accade innanzitutto per la geometria della goccia (che è sferica); prendendo inoltre come retta la direzione del fotone incidente e prendendo come punto il centro della sfera, poiché sappiamo che tra retta e punto passa un solo piano, ne consegue (per simmetria) che il moto rimane all'interno del piano su cui inizialmente si pone. La goccia d'acqua di figura 2.13 è la sezione trasversale di una goccia d'acqua tridimensionale appartenente ad un sistema cartesiano  $xyz$ , ma fintanto che il fotone subisce riflessioni interne non uscirà dal piano del foglio. In altre parole, detto  $x$  l'asse corrispondente all'asse della goccia parallelo alla direzione di provenienza del fotone,  $y$  l'asse perpendicolare ad esso (ma ancora appartenente al foglio) e  $z$  l'asse ortogonale sia a  $x$  che a  $y$  e uscente dal foglio, abbiamo che le riflessioni interne rimarranno sempre all'interno del piano  $xy$ .
- Non avremo mai la condizione di angolo critico<sup>19</sup>: ricordando che l'angolo critico  $\theta_{cr}$  per due mezzi con indice di rifrazione pari a  $n_1$  e  $n_2$  è definito come

$$\theta_{cr} = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) , \quad (2.43)$$

è possibile verificare che tale condizione non sarà mai soddisfatta. Per avere angolo critico  $\theta_2$  dovrebbe essere maggiore di  $\theta_{cr}$ , cioè dovremmo avere per l'eq. (2.43)

$$\theta_2 > \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right) .$$

<sup>19</sup>In ottica geometrica, nel contesto della rifrazione, l'angolo critico (noto anche come angolo limite) è quell'angolo di incidenza superato il quale si ottiene una riflessione interna totale.

Quindi dovrebbe verificarsi che

$$\sin \theta_2 > \frac{n_2}{n_1} . \quad (2.44)$$

Richiamando la legge di Snell (eq. 2.20):

$$\frac{\sin \theta_1}{n_1} = \frac{\sin \theta_2}{n_2} ,$$

otteniamo che

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} .$$

Sostituendo l'ultima espressione nell'eq. (2.44), ottenendo

$$\sin \theta_2 > \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} ,$$

da cui

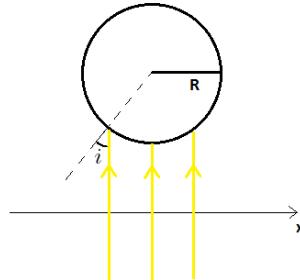
$$\sin \theta_1 > 1 ,$$

che non si verifica per nessun valore di  $\theta_1$ , come volevasi dimostrare.

## 2.4 Distribuzione di fotoni

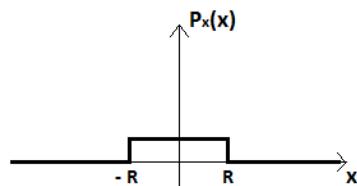
### 2.4.1 Caso bidimensionale

In questa sezione calcoleremo la distribuzione  $P_i(i)$  di fotoni incidenti con angolo di incidenza<sup>20</sup>  $i$  su di una goccia (bidimensionale) di raggio  $R$ ; estenderemo tale trattazione ad una goccia tridimensionale nella prossima sezione.



I fotoni sono distribuiti uniformemente, secondo una  $P_x(x)$  uniforme definita come:

$$\begin{cases} \frac{1}{2R} & \text{per } -R < x < R \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



<sup>20</sup>Chiamiamo  $i$  l'angolo che nella sezione 2.3.1 è chiamato  $\theta_1$ .

L'angolo  $i$  sarà pari a

$$i(x) = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right).$$

Vale inoltre che  $P([x, x + dx]) = P([i, i + di])$ , quindi possiamo scrivere

$$P_x(x)dx = P_i(i)di,$$

arrivando a

$$P_i(i) = \frac{1}{i'} P_x(x).$$

Ricordando che

$$\frac{d}{dx} \left( \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \frac{1}{R},$$

si ottiene

$$P_i(i) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}.$$

#### 2.4.2 Caso tridimensionale

Passando al caso di una sfera tridimensionale (la nostra goccia d'acqua), la distribuzione diventa bidimensionale; nel descriverla adotteremo le coordinate cilindriche. Nella figura 2.14

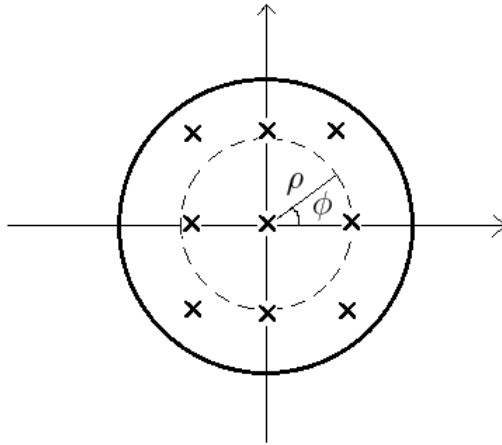


Figura 2.14: Distribuzione di fotoni in una goccia d'acqua sferica. Il simbolo X rappresenta i fotoni entranti nel foglio.

i fotoni hanno direzione ortogonale al foglio stesso. A  $\rho$  fissato si ha ugual probabilità su tutti gli angoli  $\phi$ . Quindi:

$$P(\rho) \propto \rho$$

Calcolando il coefficiente di normalizzazione:

$$N \int_0^R P_\rho(\rho) d\rho = 1$$

otteniamo  $N = \frac{2}{R^2}$ . Di conseguenza la distribuzione diventa:

$$P_\rho(\rho) = \frac{2\rho}{R^2}$$

Come nel caso bidimensionale varrà che

$$P_\rho(\rho) d\rho = P_i(i) di$$

e poiché abbiamo:

$$i = \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right) \quad (2.45)$$

$$\frac{di}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{\rho}{R})^2}} \frac{1}{R} \quad (2.46)$$

otteniamo la distribuzione  $P_i(i)$  per i fotoni:

$$P_i(i) = \frac{2\rho}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2} \quad (2.47)$$

# Capitolo 3

## Random Walk

In questo capitolo descriviamo il codice di programmazione utilizzato per ottenere le stime dell’assorbimento del rosso da parte dei fotoni che hanno subito *random walk*; tratteremo inoltre le approssimazioni che sono state utilizzate nel codice e infine mostreremo i risultati ottenuti confrontandoli con le previsioni dei modelli di capitolo 2. Come linguaggio di programmazione è stato utilizzato il C.

### 3.1 Il ray tracing

Nel descrivere il movimento che i fotoni eseguono all’interno della nube utilizzeremo il cosiddetto *ray tracing*: ad ogni interazione con una goccia il fotone subisce rifrazione o riflessione<sup>1</sup> che modificano il tragitto del fotone sino alla goccia d’acqua successiva: il processo viene iterato fino a quando il fotone ha raggiunto uno dei confini della nube.

Ipotizziamo innanzitutto che l’indice di rifrazione  $n$  sia indipendente dalla lunghezza d’onda  $\lambda$ : senza questa ipotesi non è possibile considerare che fotoni di frequenza differente percorrono *lo stesso* cammino con uguale probabilità, e non potremmo validare le successive affermazioni. D’altra parte l’approssimazione è ragionevole perché gli indici di rifrazione non si modificano di molto al variare della lunghezza d’onda. Un’esaustiva trattazione della ragionevolezza del metodo è riportata in sezione 3.8.3.

In un modello che vuole descrivere al meglio il fenomeno fisico considerato è necessario non escludere nessuna delle molteplici possibilità che i fotoni hanno per terminare il loro cammino, che sono:

1. Fuoriuscita dei fotoni dalla parte inferiore della nube, ovvero verso la superficie del suolo terrestre.
2. Fuoriuscita dei fotoni dalla parte superiore della nube, cioè verso le parti superiori dell’atmosfera.
3. Assorbimento del fotone da parte dell’acqua: questo è l’unico dei tre casi che non provvede la fuoriuscita dei fotoni dalla nube.

In figura 3.1 sono rappresentati i tre possibili cammini che la luce può compiere all’interno di un *random walk*. Nella prossima sezione trattiamo della possibilità di assorbimento della luce.

---

<sup>1</sup>Si confronti la modellistica del capitolo 2.

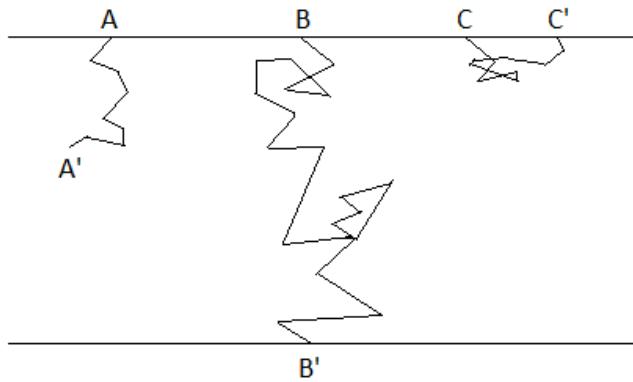


Figura 3.1: Tre possibili risultati di cammino di *random walk*. A sinistra è rappresentato un fotone di cui si perde traccia all'interno della nube perché viene assorbito, in centro è rappresentato un fotone che esce dalla parte inferiore della nube, infine a destra è rappresentato un fotone che fuoriesce dalla parte superiore della nube. Le lettere A, B e C senza apice contraddistinguono le posizioni iniziali dei fotoni, mentre le lettere A', B' e C' contraddistinguono le posizioni finali del cammino dei fotoni.

## 3.2 Assorbimento della luce

Il codice non considera l'eventualità che le gocce d'acqua *assorbano completamente* i fotoni. Giustifichiamo tale scelta immaginando la situazione di un osservatore posto al di sotto della nube: al suo occhio saranno giunti solo i fotoni che, dopo aver subito *random walk* all'interno della nube, non saranno stati completamente assorbiti e allo stesso tempo non avranno subito una deviazione di percorso tale per cui siano stati riflessi verso l'esterno dell'atmosfera<sup>2</sup>. D'altra parte sono proprio i fotoni che giungono all'osservatore gli unici ad essere interessanti nella nostra trattazione per il semplice fatto che sono gli unici che effettivamente riveliamo nelle nostre misure; l'idea consiste quindi nell'eseguire un *random walk* sulla luce che investe l'osservatore *invertendo la scala temporale*, ripercorrendo così la traiettoria compiuta dai fotoni nella nube partendo dall'osservatore e uscendo dagli strati più alti delle nuvole.

Per queste ragioni nel codice si tiene conto che nel calcolo del *random walk* sotto inversione temporale il fotone deve *necessariamente* percorrere un cammino tale per cui non venga *né* assorbito, *né* tantomeno riflesso nella direzione dell'osservatore: sappiamo infatti che i fotoni che stiamo studiando sono partiti dall'atmosfera.

Nella prossima sezione descriviamo la distribuzione spaziale delle gocce d'acqua.

<sup>2</sup>Si confrontino i casi 1 e 2 di sezione 3.1.

### 3.3 Distribuzione delle gocce d'acqua

Chiediamoci ora:

- Qual è la probabilità che un fotone urti una goccia d'acqua (di raggio  $R$ ) all'interno della nube?
- Qual è la lunghezza  $r$  dello spazio percorso tra un urto e il successivo?

Per rispondere a queste domande introduciamo un cilindro di sezione  $\pi R^2$  e di altezza  $r$  che rappresenti il volume in cui il fotone deve trovarsi per avere interazione con la goccia. Consideriamo inizialmente il caso in cui la distanza d'interazione di un fotone tra una goccia e la goccia successiva sia piccola (prendiamo quindi  $dr$ ). Chiamiamo  $n$  la densità di gocce

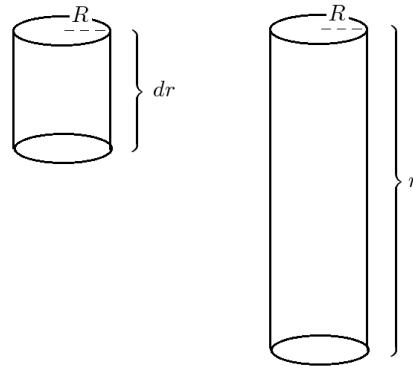


Figura 3.2: Cilindro di uscita del fotone; i due cerchi rappresentano le due gocce d'acqua (di raggio  $R$ ) urtate rispettivamente in un'interazione e nella successiva.

d'acqua all'interno del cilindro. La probabilità che un fotone urti una goccia dopo aver percorso uno spazio di lunghezza  $dr$  sarà data da una distribuzione pari a

$$P = \pi R^2 dr n .$$

Il valor medio  $N$  di interazioni all'interno del cilindro sarà pari a

$$\langle N \rangle = Vn . \quad (3.1)$$

Poiché è sempre possibile descrivere la distribuzione delle gocce attraverso una distribuzione poissoniana, scriviamo che la probabilità  $P(N)$  di avere  $N$  interazioni sarà pari a

$$P(N) = \exp^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^N}{N!} .$$

Se  $\langle N \rangle \ll 1$ , allora vale che

$$P(0) = 1 - \langle N \rangle , \quad (3.2)$$

$$P(1) = (1 - \langle N \rangle) \langle N \rangle \simeq \langle N \rangle .$$

Consideriamo ora il caso in cui il fotone subisca un urto dopo una distanza non piccola: per fare questo prima calcoliamo la probabilità  $\tilde{P}$  di *non* aver subito un urto; successivamente faremo l'insieme complementare di tale distribuzione e troveremo la probabilità cercata.

La probabilità  $\tilde{P}$  di non avere urti su di una distanza  $r$  è data dal prodotto delle probabilità<sup>3</sup>  $P(0)$  di non avere urti su di una lunghezza  $dr$  (si confronti l'eq. 3.2)

$$\tilde{P} = \prod_{i=1}^{\frac{r}{dr}} (1 - \langle N \rangle) = (1 - \langle N \rangle)^{\frac{r}{dr}}.$$

Sostituendo l'eq. (3.1) nella precedente otteniamo

$$\tilde{P}(r) = (1 - \pi R^2 n dr)^{\frac{r}{dr}}. \quad (3.3)$$

L'eq. (3.3) descrive il caso discreto; per passare al caso continuo facciamo il limite per  $dr$  tendente a zero:

$$\tilde{P}(r) = \lim_{dr \rightarrow 0} (1 - \pi R^2 n dr)^{\frac{r}{dr}} = \exp(-r \pi R^2 n), \quad (3.4)$$

dove l'ultimo passaggio è dato dal limite notevole di  $e$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (1 + ar)^{\frac{1}{r}} = e^a.$$

La probabilità  $P(r)$  di subire un urto dopo una distanza  $r$  è data dalla derivata del complementare della funzione di distribuzione cumulativa (eq. 3.4)

$$\int_0^r P(r') dr' = 1 - \exp(-r \pi R^2 n); \quad (3.5)$$

derivando l'eq. (3.5) otteniamo

$$P(r) = \pi R^2 n \exp(-r \pi R^2 n). \quad (3.6)$$

$P(r)$  è la distribuzione di probabilità esponenziale che indica la probabilità che il fotone abbia un urto dopo uno spostamento  $r$ . Alcune osservazioni:

- Poiché attraverso l'eq. (3.6) possiamo ottenere la distanza  $r$  tra le prime due gocce vicine<sup>4</sup>, e poiché tale distanza può essere calcolata per *ognuna* delle coppie di gocce vicine iterando il processo di calcolo della  $P(r)$ , ne segue che la distribuzione spaziale delle gocce della nube non va implementata nel codice; non va cioè creata una griglia di distribuzione contenente la posizione di ogni particella d'acqua, ma è sufficiente conoscere la probabilità  $P(r)$  per avere una descrizione accurata delle posizioni di *tutte* le gocce d'acqua all'interno della nube.

Il vantaggio della  $P(r)$  è quindi duplice: permettere una descrizione accurata del fenomeno fisico e migliorare notevolmente l'efficienza di esecuzione del codice (rispetto ad un programma che crea ad ogni esecuzione la disposizione di tutte le particelle d'acqua).

---

<sup>3</sup>Si moltiplicano tra loro le probabilità poiché sono indipendenti.

<sup>4</sup>Il processo che porta dalla distribuzione  $P(r)$  alla distanza  $r$  è descritto in sezione 3.3.1.

- La distribuzione  $P(r)$  va modificata per poter essere utilizzata all'interno del codice. Sarà necessario associarla ad una funzione che seguendo una distribuzione uniforme genera un numero casuale compreso tra 0 e 1; nella prossima sezione descriviamo tale procedimento.

### 3.3.1 La distribuzione esponenziale nel codice

In questa sezione descriviamo il passaggio dalla forma della distribuzione esponenziale dell'eq. (3.6) alla forma utilizzata all'interno del codice.

Detto  $\mu = \pi R^2 n$ , abbiamo che

$$P_r(r) = \mu e^{-\mu r}.$$

Utilizziamo una funzione  $P_y(y)$  che genera numeri casuali distribuiti in modo uniforme tra 0 e 1

$$P_y(y) = 1, \quad \text{tra } 0 \text{ e } 1. \quad (3.7)$$

Poiché vale che

$$P([r, r + dr]) = P([y, y + dy]),$$

possiamo scrivere

$$P_r(r)dr = P_y(y)dy,$$

e utilizzando l'eq. (3.7), otteniamo

$$P_r(r)dr = dy, \quad \text{con } y \in [0, 1].$$

Calcoliamo la derivata di  $y$  rispetto a  $r$

$$y' = \left| \frac{dy}{dr} \right| = \mu e^{-\mu r}. \quad (3.8)$$

Otteniamo quindi

$$y = e^{-\mu r},$$

e invertendo la formula otteniamo

$$r = -\frac{1}{\mu} \ln y, \quad \text{con } y \in [0, 1]. \quad (3.9)$$

Il parametro  $y$  può essere generato numericamente usando generatori pseudo-casuali standard (con distribuzione uniforme nell'intervallo 0 – 1).

### 3.4 Riflessione e rifrazione

Nel capitolo 2 abbiamo descritto la riflessione e la rifrazione che avvengono nel corso dell'interazione tra i fotoni e ogni goccia d'acqua. In questa sezione esplicitiamo le modalità con cui il codice tratta tali interazioni. All'inizio della sezione 2.3.3 abbiamo indicato con  $f_i$  la frazione di luce riflessa in funzione dell'angolo di ingresso. D'altra parte si ricorda che  $1 - f_i$  è la quantità di luce rifratta. Poiché in ogni ciclo del codice trattiamo un fotone singolo, e non un pacchetto, ora daremo a  $f_i$  (e di conseguenza a  $1 - f_i$ ) un diverso significato. Di conseguenza nel modello che andiamo a spiegare  $f_i$  fornirà la stima della probabilità che il fotone sia riflesso; perciò essa sarà espressa in valori percentuali.

Facciamo una precisazione su  $f_i$ , richiamando innanzitutto l'equazione che la definisce<sup>5</sup>, ovvero

$$f_i = (E_{rifl}^{/\!/\!})^2 + (E_{rifl}^{\perp})^2. \quad (3.10)$$

Con la terminologia delle eq. (2.32) e (2.34) si calcola  $f_i$  considerando l'aria come mezzo di provenienza del fotone, e conseguentemente l'acqua come mezzo su cui il fotone incide. Invece, quando vogliamo calcolare  $f_i$  all'interno della goccia d'acqua per capire se dopo una prima rifrazione il fotone subirà riflessioni interne o uscirà dalla goccia con una successiva rifrazione, dobbiamo modificare le formule (2.32) e (2.34). In particolare è necessario:

- Invertire l'ordine degli indici di rifrazione  $n$  e  $n'$ .
- Invertire l'ordine delle permeabilità magnetiche  $\mu$  e  $\mu'$ .
- Assegnare all'angolo di incidenza  $i$  il valore di  $\theta_2$  (e non di  $\theta_1$ ).

I primi due punti si giustificano per simmetria del sistema. Il terzo punto è meno intuitivo, ma si comprende considerando la figura 3.3: nel punto A l'angolo di incidenza  $i$  coincide con  $\theta_1$ , mentre nel punto B, per la particolare geometria della sfera, l'angolo di incidenza è pari a  $\theta_2$ , cioè è pari all'angolo di rifrazione del punto A.

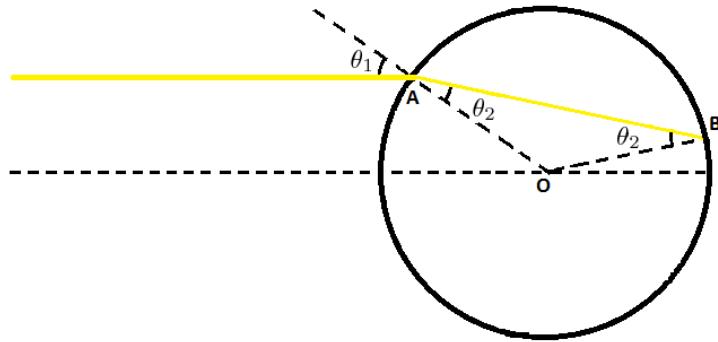


Figura 3.3: *Ray tracing*.

<sup>5</sup>Stiamo cioè riconsiderando l'eq. 2.40.

Di conseguenza per calcolare  $f_i$  all'interno della goccia è necessario utilizzare all'interno dell'eq. (3.10) le seguenti formule<sup>6</sup>:

$$E_{rifl}^{/\!/} = \frac{n' \cos i - \frac{\mu'}{\mu} \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i}}{n' \cos i + \frac{\mu'}{\mu} \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i}},$$

$$E_{rifl}^{\perp} = \frac{\frac{\mu'}{\mu} n^2 \cos i - n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i}}{\frac{\mu'}{\mu} n^2 \cos i + n' \sqrt{n^2 - n'^2 \sin^2 i}}.$$

Sottolineamo infine che le gocce d'acqua assorbono la luce nelle frequenze relative ai propri moti vibrazionali<sup>7</sup> solo se i fotoni vi passano attraverso; di conseguenza l'assorbimento del rosso con conseguente aumento del blu nel colore delle nubi è da attribuire solamente alle rifrazioni, e non alle riflessioni<sup>8</sup>.

### 3.4.1 Trattazione tridimensionale

Nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2, seguendo una trattazione bidimensionale, abbiamo considerato le proprietà cinematiche della luce (rifrazione e riflessione) che concorrono nell'interazione tra fotoni e acqua. In questa sezione estendiamo la trattazione ad un ambiente tridimensionale. Dopo aver introdotto questa trattazione potremo passare alla descrizione vera e propria del codice.

Consideriamo un sistema  $xyz$  in coordinate sferiche

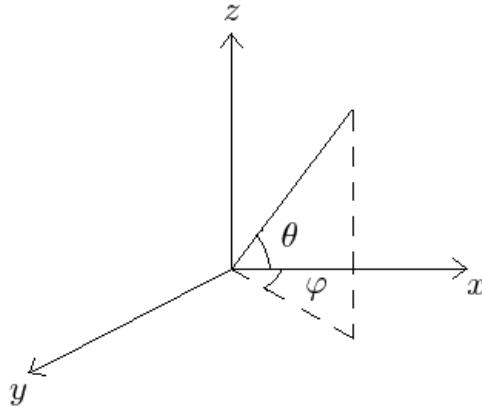


Figura 3.4: Sistema in coordinate sferiche.

Introduciamo all'interno del sistema di riferimento una sfera di raggio unitario, e consideriamo sulla superficie della sfera il punto B: esso rappresenta il punto in cui il fotone incidente colpisce la superficie della goccia d'acqua. La sua direzione di provenienza si ottiene prolungando il segmento  $\overline{OB}$  verso l'esterno della sfera.

<sup>6</sup>All'interno del codice questo diverso significato di  $f_i$  viene registrato nella variabile f\_int ("int" sta per "interna").

<sup>7</sup>Si confronti la sezione 1.2.1.

<sup>8</sup>Si confrontino [2], [10].

Ora prendiamo in considerazione il punto C, appartenente anch'esso alla superficie della sfera: esso indica il punto in cui il fotone esce dalla goccia d'acqua dopo aver eseguito riflessione o rifrazione; la direzione di uscita si ottiene, analogamente a quanto detto per il punto B, prolungando il segmento OC verso l'esterno della sfera. Per quanto detto nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2, una volta che il parametro d'impatto  $b$  è fissato, ne segue che anche la distanza tra B e C è fissata (e in particolare dipende dall'angolo  $\theta$ ). La differenza rispetto all'analisi bidimensionale delle proprietà cinematiche è che *di conseguenza* C può appartenere a uno qualsiasi dei punti della circonferenza  $\Gamma_1$  di raggio  $\overline{BC}$ . Aggiungiamo inoltre che  $\theta$  indica rispettivamente l'angolo  $\theta_R$  o  $\theta_S$  a seconda che si stia considerando il fenomeno di riflessione o di rifrazione<sup>9</sup>.

Per aiutare la comprensione delle ultime osservazioni si osservi la figura 3.5, in cui abbiamo messo a confronto riflessione nel caso bidimensionale e tridimensionale, rappresentando i punti B, C e la circonferenza  $\Gamma_1$ .

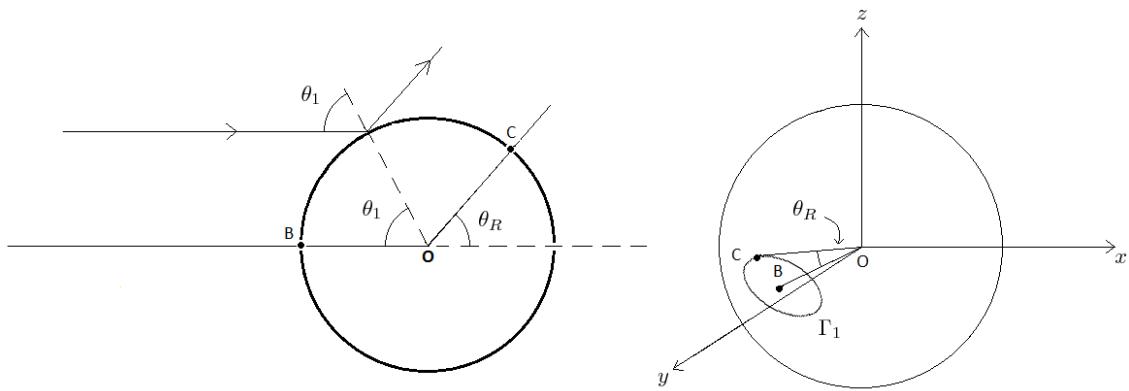


Figura 3.5: Riflessione bidimensionale e tridimensionale.

Il problema che vogliamo risolvere è il seguente: come fare a calcolare l'angolo tra il fotone deviato e l'asse  $z$ ? Una possibilità consiste nel ruotare il punto B fino a quando il segmento  $\overline{OB}$  vada a posizionarsi sull'asse  $z$  (in figura 3.6 il segmento  $\overline{OB}$  ruotato finisce sul segmento  $\overline{OA}$ ): una volta calcolato tale angolo di rotazione, a cui diamo il nome di  $\beta$ , abbiamo l'angolo tra il fotone con direzione incidente sulla sfera ( $\overline{OA}$ ) e la verticale. Conoscendo l'orientamento dei fotoni uscenti dopo ogni singola interazione possiamo calcolare la loro posizione sull'asse verticale. Per calcolare  $\beta$  prendiamo il punto C' di latitudine  $90^\circ - \theta$  e longitudine  $\varphi$ , con  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , e lo rappresentiamo in coordinate cartesiane.

<sup>9</sup>Per l'equazione di  $\theta_S$  si confronti (2.26). Per l'equazione di  $\theta_R$  si confronti (2.27).

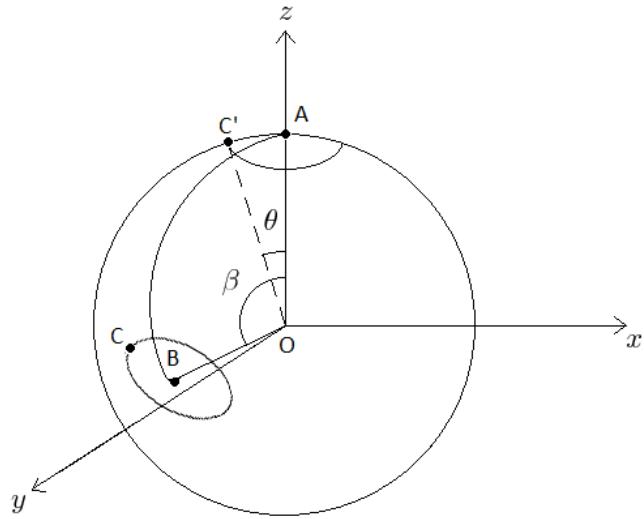


Figura 3.6: Riflessione e rifrazione su di una sfera tridimensionale.

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \cos \theta. \end{cases}$$

Ora ruotiamo il punto C' di un angolo  $\beta$  assumendo che la rotazione avvenga solamente lungo il piano  $zx$ : la rotazione deve portare il punto C' in C e il punto A in B. Le coordinate del punto dopo la rotazione sono pari a

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta - z \sin \beta, \\ y' = y, \\ z' = x \sin \beta + z \cos \beta. \end{cases}$$

L'ultimo passaggio consisterebbe nel riconvertire le tre coordinate del punto  $x', y', z'$  in latitudine e longitudine. Tuttavia, poiché siamo interessati solamente alla latitudine (a cui diamo il nome di  $\beta'$ ) abbiamo

$$\beta' = \arccos z'. \quad (3.11)$$

L'eq. (3.11) è utilizzata nel codice per valutare lo spostamento del fotone sull'asse verticale.

### 3.5 Il programma

In questa sezione descriviamo il codice di programmazione<sup>10</sup>. Dopo aver definito le librerie necessarie alla compilazione, si definiscono tutti i parametri necessari; menzioniamo solo i più significativi, che sono:

- la dimensione di ogni goccia d'acqua, fissata mediante il raggio  $R$ ;
- la quantità di acqua totale precipitata (con il parametro  $T$  descritto con l' eq. 2.9);
- gli indici di rifrazione di aria e acqua<sup>11</sup>.

Il ciclo principale del programma, chiamato "PROG", calcola il processo di *ray tracing* all'interno della nube per un singolo fotone. Esso viene ripetuto per un numero di volte pari al numero  $N$  di fotoni di cui si vuole calcolare il *random walk*. Descriviamo tale ciclo: sia  $y$  il parametro che indica la posizione del fotone sull'asse verticale della nube; il primo passaggio pone  $y = 0$  (condizione necessaria per poter reiterare il ciclo per più fotoni). Sia  $\theta_y$  l'angolo tra la direzione del fotone e l'asse verticale. Inizialmente  $\theta_y$  è pari a  $45^\circ$ , valore corrispondente all'angolo tra l'asse terrestre ed il raggio che unisce la Terra con il Sole nell'attuale periodo dell'anno<sup>12</sup>. Tale valore andrebbe modificato a seconda del mese rispetto al quale la simulazione vuole essere rappresentativa; in realtà poiché l'informazione di  $\theta_y$  viene smarrita dopo le prime interazioni, può essere lasciato invariato (un'ultima osservazione su  $\theta_y$  verrà trattata in sezione 3.8.2).

A questo punto il programma ripete le seguenti operazioni per ogni singola interazione:

1. attraverso l'eq. (3.9) viene valutata la distanza tra il fotone e la goccia più vicina su cui il fotone interagisce;
2. si valuta l'incremento  $dy$  del tragitto del fotone sull'asse verticale percorso per arrivare fino alla goccia più vicina;
3. si calcolano  $\theta_1$  e  $\theta_2$  in base al parametro d'impatto<sup>13</sup>, gli indici di rifrazione e il raggio della goccia secondo le formule 2.19 e 2.21;
4. utilizzando le leggi di Fresnel si calcola le probabilità di riflessione  $f_i$  (si confronti 2.40);
5. si genera un numero casuale tra 0 e 1 che si confronta con la probabilità di riflessione del fotone: se il numero casuale è minore della probabilità  $f_i$  il fotone ha subito riflessione, se il numero è superiore il fotone ha subito rifrazione.
6. se il fotone ha subito riflessione si riparte dal punto 1; se ha subito rifrazione si passa al punto 7;
7. si valuta l'assorbimento dovuto al passaggio del fotone nell'acqua e, analogamente ai punti 4 e 5, si genera un valore casuale che si confronta con la probabilità di avere riflessioni interne (eq. 3.4) o di avere rifrazione; il punto 7 si ripete fintanto che si hanno riflessioni interne; quando questo non accade significa che il fotone ha subito una seconda rifrazione<sup>14</sup> ed è uscito dalla goccia. Il ciclo prosegue con il punto 1.

<sup>10</sup>L'intero codice può essere consultato in appendice B.

<sup>11</sup>Rimandiamo alle sezioni 3.8.3 e 3.8.4 per un'esaustiva trattazione degli indici di rifrazione.

<sup>12</sup>Metà febbraio.

<sup>13</sup>Il parametro d'impatto viene definito come variabile stocastica; si confronti 3.7.

<sup>14</sup>La prima rifrazione è avvenuta entrando nella goccia.

Il ciclo termina non appena il fotone ha percorso sull'asse verticale una distanza uguale o superiore alla lunghezza caratteristica  $L$  scelta per la nube.

Al termine del ciclo “PROG” il codice restituisce in un file il valore di “l\_assorb”, che corrisponde alla lunghezza su cui è avvenuto l'assorbimento (in metri). Nel capitolo 4 confronteremo questi valori di assorbimento simulati dal programma con i dati presenti in letteratura e con i valori delle nostre previsioni teoriche effettuate nel capitolo 2.

## 3.6 Parametri caratteristici di una nube

Come già è stato detto all'inizio della sezione 3.5, all'interno dei parametri caricati come costanti dal codice sono state definite la dimensione caratteristica della nube  $L$ , la dimensione di ogni goccia d'acqua (attraverso il raggio  $R$ ), la quantità di acqua totale precipitata  $T$  e gli indici di rifrazione di aria e acqua. Modificando questi parametri è possibile descrivere diverse tipologie di nubi. Vediamo in dettagli i parametri più importanti.

### 3.6.1 Lunghezza caratteristica

Il parametro  $L$  indica la dimensione caratteristica della nube; attraverso di esso stabiliamo la distanza verticale che il fotone deve percorrere per attraversare tutta la nube. Se ad esempio si volesse descrivere il cammino dei fotoni all'interno di un cumulonembo si dovrà porre  $L$  pari ad un valore tra i 1500 e i 2000 m, e se si volesse descrivere il cammino dei fotoni all'interno di un nembostrato sarà necessario eseguire il codice ponendo il parametro  $L$  uguale ad un valore compreso tra i 750 e i 1000 m. Rimandando all'appendice A per una classificazione delle nubi, sottolineamo che per ottenere un valore preciso di  $L$  è necessario riferirsi ad una nube di cui si conosce la sua altezza effettiva. Questo può risultare complicato, sia per la difficoltà di rilevamento in quanto l'oggetto d'interesse è situato in quota, sia perché non rimane invariato nel tempo; anzi, una sua peculiarità consiste proprio nel modificarsi in forma e dimensione anche nel giro di pochi minuti, rendendo difficile un rilevamento appropriato delle sue caratteristiche. Nel nostro caso la valutazione del parametro  $L$  non è da considerarsi un problema. In sezione 2.1 abbiamo mostrato che definendo  $T$  nel seguente modo

$$T = n \frac{4}{3} \pi R^3 L ,$$

arriviamo ad una forma di  $W$  che è pari a

$$W = \frac{9}{8} \frac{T^2}{R} ,$$

cioè arriviamo ad una forma di  $W$  che è *indipendente dalla lunghezza caratteristica*.

Un buon modello descrittivo delle nubi è legato alla precisione con cui definiamo il parametro  $T$ .

### 3.6.2 Total precipitable water

Il parametro  $T$  designa la profondità totale di acqua in forma liquida e in forma di vapore acqueo presente nella nube. È necessario sottolineare che all'interno di questo parametro consideriamo solamente il contributo dell'acqua in forma liquida, escludendo così il contributo relativo al vapore acqueo. L'approssimazione è ragionevole in quanto le molecole di  $H_2O$  che compongono il vapore acqueo non sono sufficienti per determinare uno scattering sui fotoni.

Il valore numerico di  $T$  è fondamentale al nostro modello in quanto ci permette di calcolare il numero medio di interazioni  $N$  e la colonna di acqua assorbita  $W$ . Il valore di  $T$  scelto per il nostro modello è ottenuto dalle misure del sensore MODIS<sup>15</sup> del veicolo spaziale meteorologico NASA chiamato Terra e vale  $T = 1$  cm. Riportiamo, a titolo esemplificativo, i dati del 30 Gennaio 2005

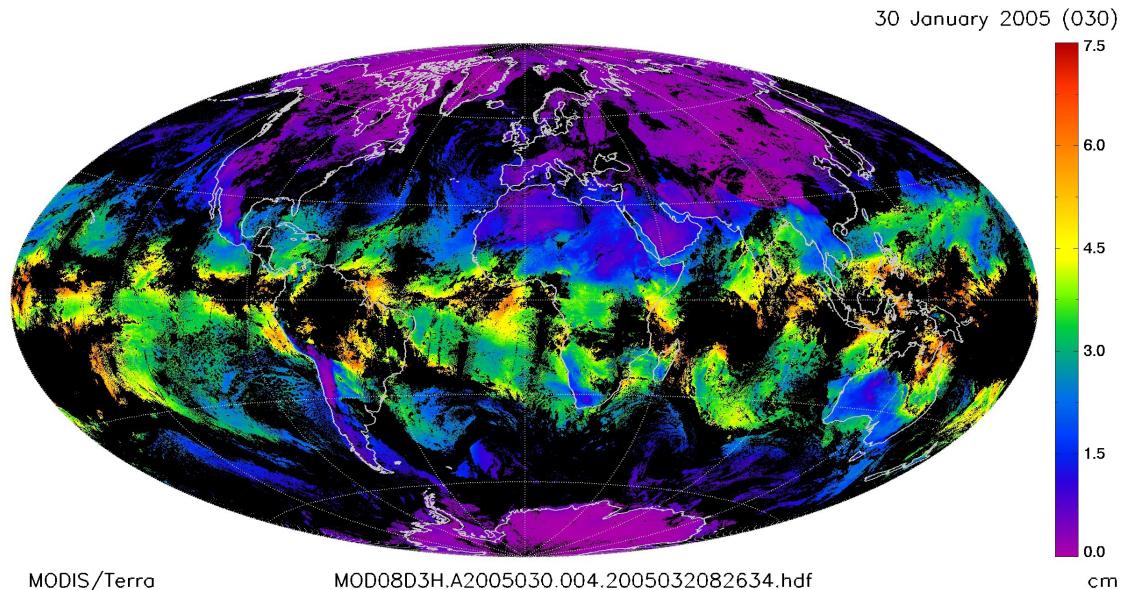


Figura 3.7: *total precipitable water*.

Nel nostro modello prendiamo chiaramente un valore di  $T$  che è mediato sulle innumerevoli quantità di dati forniti dal satellite Terra; se si volessero descrivere delle nubi molto dense di acqua, si dovrebbe prendere un valore di  $T$  maggiore.

<sup>15</sup>Per maggiori informazioni sul sensore si veda [https://lpdaac.usgs.gov/lpdaac/products/modis\\_overview](https://lpdaac.usgs.gov/lpdaac/products/modis_overview), per le immagini si veda [http://modis-atmos.gsfc.nasa.gov/MOD05\\_L2/sample.html](http://modis-atmos.gsfc.nasa.gov/MOD05_L2/sample.html)

### 3.6.3 Dimensione delle gocce d'acqua

Per calcolare il diametro delle gocce d'acqua esistono due approcci: 1) misure *in situ* attraverso l'utilizzo di sonde aeree, e 2) metodi di “inverse retrieval” applicati a misure eseguite utilizzando la tecnica lidar<sup>16</sup>. La misura delle dimensioni delle gocce mediante delle sonde aeree è il metodo che presenta difficoltà maggiori, ma resta universalmente riconosciuto come il più accurato a disposizione.

La dimensione delle gocce d'acqua è inferiore<sup>17</sup> ai  $50\mu\text{m}$ . Il grado di variabilità delle misure di ogni tipologia di nube, comunque, porta a una difficoltà nella parametrizzazione e nel fare semplici assunzioni sulla microfisica delle nuvole. A noi interessa in prima approssimazione un valor medio tipico: per ottenerlo abbiamo preso i dati forniti dal sensore MODIS; presentiamo qui un'immagine relativa al 15 Marzo 2006:

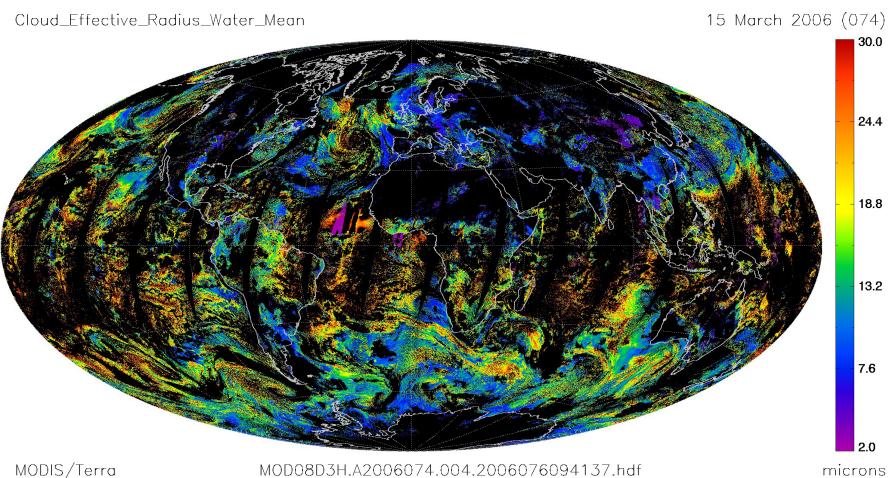


Figura 3.8: Raggio medio delle gocce d'acqua delle nubi.

Attraverso l'analisi dei dati del satellite e attraverso i dati di letteratura<sup>18</sup> stimiamo il raggio medio delle gocce con un valore pari a  $10\mu\text{m}$ .

Nella prossima sezione descriviamo la conversione all'interno del codice del parametro d'impatto  $b$ .

<sup>16</sup>Laser Imaging Detection and Ranging: è una tecnica di telerilevamento che permette di determinare la distanza di un oggetto o di una superficie utilizzando un impulso laser. La differenza con il radar è quindi l'utilizzo della luce al posto delle onde radio. In particolare il lidar usa lunghezze d'onda ultraviolette, nel visibile o nel vicino infrarosso, e questo rende possibile localizzare e ricavare immagini e informazioni su oggetti molto piccoli, di dimensioni pari alla lunghezza d'onda usata. Perciò il lidar è molto sensibile agli aerosol e al particolato presente in sospensione nelle nuvole ed è molto usato in meteorologia e in fisica dell'atmosfera.

<sup>17</sup>Si confronti Lee et al. [10].

<sup>18</sup>Si confronti [6], [14].

### 3.7 Il parametro d'impatto $b$

Presentiamo ora il parametro d'impatto  $b$ , che abbiamo introdotto con l'eq. (2.18) nella sezione 2.3.1 per calcolare il valore degli angoli  $\theta_1$  (eq. 2.19) e  $\theta_2$  (eq. 2.21). Innanzitutto vale che

$$P_b(b) \propto b ;$$

normalizzando tale probabilità

$$N \int_0^R P_b(b) db = 1$$

otteniamo

$$N = \frac{2}{R^2} .$$

La distribuzione  $P_b(b)$  è quindi pari a

$$P_b(b) = \frac{2b}{R^2} .$$

Affinché si possa usare tale probabilità nel codice, in analogia a quanto detto nella sezione 3.3.1, dobbiamo esprimere  $P_b(b)$  in funzione di una variabile  $y$  che viene generata in maniera casuale tra 0 e 1 attraverso la funzione *random()*. Poiché vale che

$$P([b, b + db]) = P([y, y + dy]) ,$$

possiamo scrivere

$$P_b(b)db = P_y(y)dy ,$$

e utilizzando l'eq. (3.7), otteniamo

$$P_b(b)db = dy , \quad \text{con } y \in [0, 1] .$$

La derivata di  $y$  rispetto a  $b$  è pari a

$$\frac{dy}{db} = \frac{2b}{R^2} .$$

Integrando otteniamo

$$y = \frac{b^2}{R^2} ,$$

e invertendo la formula giungiamo a

$$b = \sqrt{yR^2} , \tag{3.12}$$

avendo escluso la soluzione negativa in quanto non può rappresentare una distanza.

## 3.8 Ulteriori approssimazioni

In questa sezione descriviamo ulteriori approssimazioni utilizzate all'interno del codice.

### 3.8.1 Traiettoria del fotone

Un'approssimazione utilizzata all'interno del codice consiste nel modificare le direzioni di uscita del fotone (riflesso e rifratto) dalla goccia d'acqua; in particolare si effettua una traslazione delle semirette rappresentanti i fotoni in uscita fino al punto in cui, allungando tali semirette all'interno della goccia, esse risultino passanti per il centro della goccia stessa. L'approssimazione è ragionevole perché le gocce hanno un diametro medio dell'ordine dei  $\mu\text{m}$ , mentre la distanza<sup>19</sup>  $r$  tra di esse è dell'ordine del metro. Nel capitolo 2 abbiamo fornito in dettaglio le formule dell'angolo di riflessione al centro, chiamato  $\theta_S$  (eq. 2.26) e dell'angolo di rifrazione al centro, chiamato  $\theta_R$  (eq. 2.27).

### 3.8.2 Un'osservazione su $\theta_y$

In un recente lavoro sul colore del cielo nuvoloso<sup>20</sup>, R.L.Lee e J.H.Hernández-Andrés hanno limitato la loro analisi nei confronti dell'inclinazione dei raggi solari rispetto all'orizzonte (il parametro che nel nostro lavoro prende il nome di  $\theta_y$ ), ponendo la seguente limitazione:

$$\theta_y > 5^\circ .$$

Dobbiamo assumere anche noi che il nostro codice perda di validità considerando valori di  $\theta_y$  minori ai  $5^\circ$ . La ragione è che al di sotto di tale valore la sorgente principale che illumina le nubi non è più il Sole, e il contributo preponderante all'illuminazione viene causato dalle particelle su cui avviene lo scattering di Rayleigh; detto in parole più semplici, la fonte di luce diventa il cielo blu<sup>21</sup> presente al di sopra della nube.

### 3.8.3 Indipendenza degli indici di rifrazione dalla lunghezza d'onda $\lambda$

Nel passaggio da un mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  ad un mezzo con indice di rifrazione  $n_2$  il fotone subisce riflessione e rifrazione<sup>22</sup>. Ricordiamo che per calcolare la riflessione si utilizza la legge di Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (3.13)$$

Per quanto riguarda la rifrazione abbiamo che l'unico angolo di nostro interesse, per quanto detto nella sezione 3.8.1, è  $\theta_S$ . L'espressione di quest'angolo, ricavata nella sezione 2.3.1, è data da

$$\theta_s = 2(\theta_1 - \theta_2) ,$$

dove  $\theta_2$ , per l'eq. (2.21), è pari a

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \frac{b}{R} \right) . \quad (3.14)$$

Si noti che sia l'angolo  $\theta_1$  che l'angolo  $\theta_2$  dipendono fortemente dagli indici di rifrazione. Poiché l'indice di rifrazione è a sua volta in *funzione della lunghezza d'onda*, ne segue che sia l'eq. (3.13) che l'eq. (3.14) si modificano al variare della lunghezza d'onda considerata.

<sup>19</sup>Si confronti 3.9.

<sup>20</sup>Si confronti in bibliografia [10].

<sup>21</sup>Il cielo è blu per via dello scattering di Rayleigh.

<sup>22</sup>Un'ampia trattazione è stata fornita nelle sezioni 2.3.1 e 2.3.2.

L'approssimazione che abbiamo introdotto nel codice è stata quella di assumere *indipendenza* dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda, utilizzando un unico valore per l'indice di rifrazione dell'acqua e un unico valore per l'indice di rifrazione dell'aria. La lunghezza di riferimento associata ai due singoli valori degli indici di rifrazione è di  $\simeq 589$  nm: è infatti convenzione, nella misura standard degli indici di rifrazione, prendere come sistema di riferimento la linea D del doppietto del sodio<sup>23</sup>, che ha appunto una lunghezza d'onda<sup>24</sup> pari a 589.29 nm.

### 3.8.4 Indice di rifrazione dell'acqua

È opinione diffusa ritenere che l'indice di rifrazione sia conosciuto con un buon livello di accuratezza, ma ciò non è vero: si osservino infatti i lavori di Lynch-Livingston [11], Segelstein [15] e i dati dello IAPWS<sup>25</sup> [8], riportati in figura 3.9:

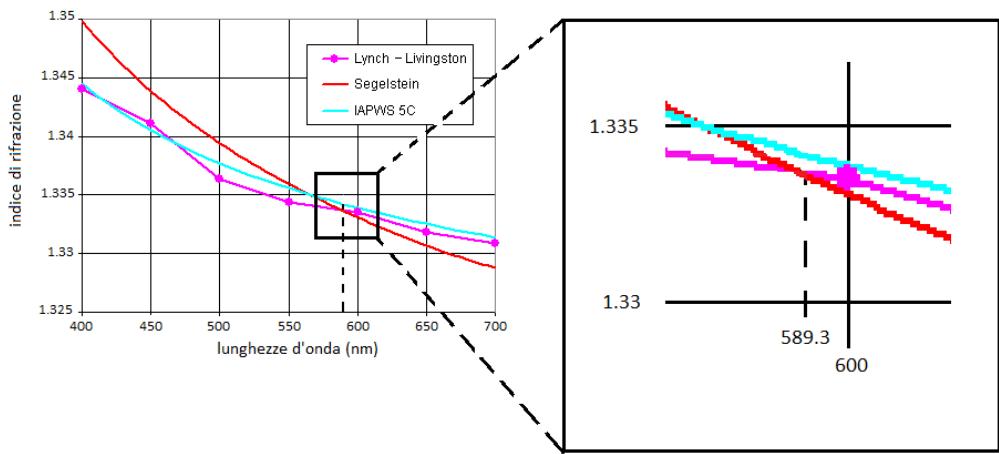


Figura 3.9: Indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda.

Come si osserva, la letteratura presenta discrepanze nella valutazione dell'indice di rifrazione dell'acqua per una data lunghezza d'onda. Fortunatamente per la lunghezza d'onda che abbiamo scelto non si riscontrano grosse differenze.

Aggiungiamo che l'indice di rifrazione è dipendente anche dalla temperatura e dalla pressione, e riportiamo nella seguente tabella i valori in funzione di lunghezza d'onda, temperatura e pressione<sup>26</sup>.

<sup>23</sup>Le linee D1 e D2 caratterizzano il ben noto “doppietto del sodio”; al centro di queste righe, corrispondente a 589.29 nm, è dato il nome di linea D.

<sup>24</sup>Corrispondente alla lunghezza d'onda del giallo, secondo la convenzione seguita in questo lavoro. Si confronti la figura 1.4.

<sup>25</sup>Acronimo di *International Association for the Properties of Water and Steam*.

<sup>26</sup>Si confronti [8]

| Lunghezza d'onda<br>nm | Temperatura<br>°C | Pressione/MPa |             |             |           |
|------------------------|-------------------|---------------|-------------|-------------|-----------|
|                        |                   | 0.1           | 1           | 100         | 1000      |
| 226.50                 | 0                 | 1.394 527     | 1.394 711   | 1.396 526   | 1.412 733 |
|                        | 100               | 1.000 216 8   | 1.375 622   | 1.377 286   | 1.391 983 |
|                        | 200               | 1.000 168 3   | 1.001 775 4 | 1.338 299   | 1.359 330 |
|                        | 500               | 1.000 100 8   | 1.001 015 5 | 1.010 990 6 | 1.198 312 |
| 589.00                 | 0                 | 1.334 344     | 1.334 494   | 1.335 969   | 1.349 101 |
|                        | 100               | 1.000 187 6   | 1.318 725   | 1.320 084   | 1.332 057 |
|                        | 200               | 1.000 145 6   | 1.001 535 9 | 1.287 891   | 1.305 191 |
|                        | 500               | 1.000 087 1   | 1.000 877 3 | 1.009 493 9 | 1.170 231 |
| 1013.98                | 0                 | 1.326 135     | 1.326 279   | 1.327 710   | 1.340 435 |
|                        | 100               | 1.000 183 7   | 1.311 257   | 1.312 577   | 1.324 202 |
|                        | 200               | 1.000 142 7   | 1.001 505 2 | 1.281 529   | 1.298 369 |
|                        | 500               | 1.000 085 6   | 1.000 861 9 | 1.009 326 7 | 1.167 119 |

Ora, avendo scelto di prendere come lunghezza d'onda 589 nm, fissiamo l'attenzione sui valori centrali della tabella. Consideriamo inoltre la figura 3.10 e facciamo alcune considerazioni:

- Le nubi, che si presentano solo all'interno della troposfera, hanno una temperatura inferiore ai 15° C e scendono anche sotto lo zero; per esempio, in figura 3.10 sono presenti degli stratocumuli che raggiungono temperature pari a 56° sotto lo zero. Nella tabella non abbiamo valori per l'indice di rifrazione al di sotto dello zero, ma questo non è un problema perché non siamo interessati a nubi con temperature inferiori agli 0° C in quanto sotto tali temperature l'acqua si presenta sotto forma di ghiaccio, e nel nostro modello non trattiamo le molecole d'acqua al di fuori dello stato liquido.
- Per quanto riguarda la pressione abbiamo che le nuvole hanno dei valori pari a

$$226 \text{ hPa} < P < 1013.25 \text{ hPa} ;$$

considereremo quindi solamente i valori della prima colonna della pressione.

Alla luce di quanto detto è ragionevole scegliere come indice di rifrazione dell'acqua un valore pari a

$$n_w = 1.334 . \quad (3.15)$$

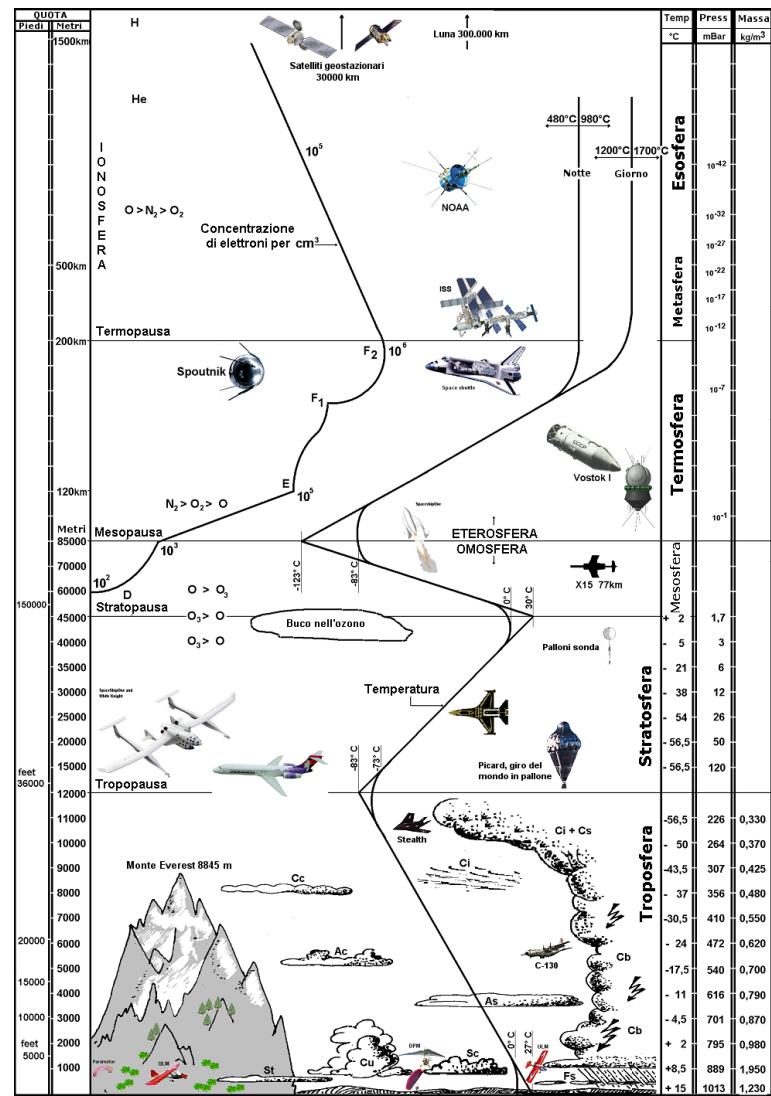


Figura 3.10: Atmosfera terrestre.

# Capitolo 4

## Analisi e risultati

Abbiamo utilizzato il programma descritto nel capitolo 3 per verificare l'attendibilità delle nostre stime eseguite nelle sezioni 2.1 e 2.2; abbiamo poi confrontato i nostri risultati con alcuni valori presentati in letteratura sullo studio del cielo nuvoloso.

Il programma è stato creato in modo da ripetere per un gran numero di volte il processo di *random walk* del singolo fotone all'interno della nube; tale numero, definito al momento dell'esecuzione, è sempre stato ragionevolmente elevato consentendo così di utilizzare della statistica con la quale analizzare i risultati ottenuti; in particolare da ogni set di dati il programma dà come risultato sia il numero di interazioni che il fotone ha eseguito nell'intero arco del processo di *random walk*, sia il valore della lunghezza di assorbimento.

### 4.1 Prima simulazione ( $L = 200 \text{ m}$ , $R = 5 \mu\text{m}$ , $T = 1 \text{ cm}$ )

La prima simulazione è stata eseguita per 50000 volte; abbiamo preso una nube con lunghezza caratteristica pari a  $L = 200 \text{ m}$ ; il raggio delle gocce d'acqua è stato posto pari a  $R = 5 \mu\text{m}$  (corrispondente al valore con cui descriviamo le gocce di dimensione standard<sup>1</sup>, mentre il valore di  $T$ , corrispondente alla profondità totale di acqua presente nella nube, è stato posto pari a 1 cm. Sottolineiamo che, per quanto detto nella sezione 2.1, il nostro modello è indipendente da  $L$ ; ciò nonostante abbiamo voluto verificare la corrispondenza fra il modello teorico e la simulazione in linguaggio C, per cui riportiamo comunque il valore della lunghezza caratteristica stabilita per ogni simulazione. Arriveremo a mostrare l'indipendenza<sup>2</sup> dei risultati del codice dal parametro  $L$ .

---

<sup>1</sup>Si confronti la sezione 3.6.3.

<sup>2</sup>In particolare l'indipendenza da  $L$  verrà mostrata nel confronto tra i valori di questa simulazione e i valori della terza simulazione, 4.3.

Mostriamo in figura 4.1 il grafico della distribuzione del numero di interazioni

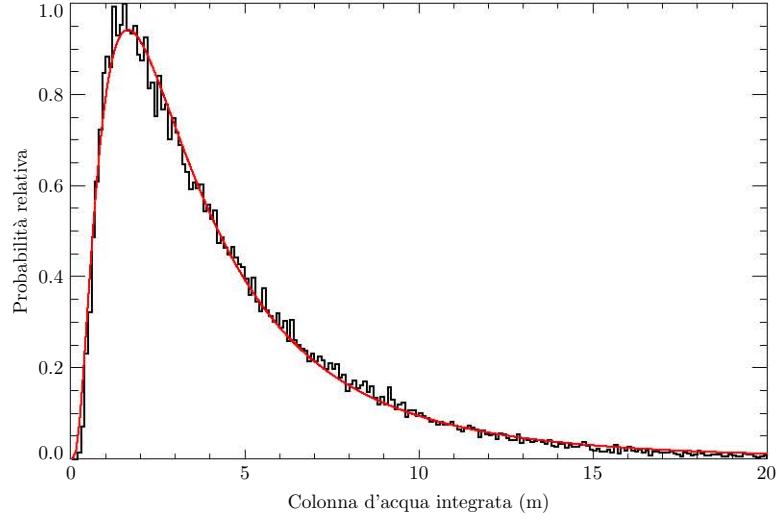


Figura 4.1: Istogramma dei valori della colonna d'acqua. In rosso è rappresentata la curva di fit con andamento log-normale.

Il numero di conteggi inizialmente presente sull'ordinata è stato sostituito con una distribuzione di probabilità normalizzata sul valore di conteggi maggiore (posto quindi uguale a 1). Riportiamo i valori della colonna d'acqua ottenuti dalla simulazione:

$$W \text{ (valor medio)} = 4.38 \text{ m ,}$$

$$W \text{ (mediana)} = 3.32 \text{ m ,}$$

$$\sigma = 2.77 \text{ m .} \quad (4.1)$$

il fit migliore dell'istogramma è dato dalla curva log-normale; la distribuzione log-normale con cui abbiamo fissato l'istogramma presenta una sigma molto alta, cosa che del resto si riscontra nella  $\sigma$  dei nostri dati (eq. 4.1).

Per quanto riguarda le interazioni, presentiamo in figura 4.2 i dati e il miglior fit sull'istogramma, che risulta di nuovo essere una curva log-normale.

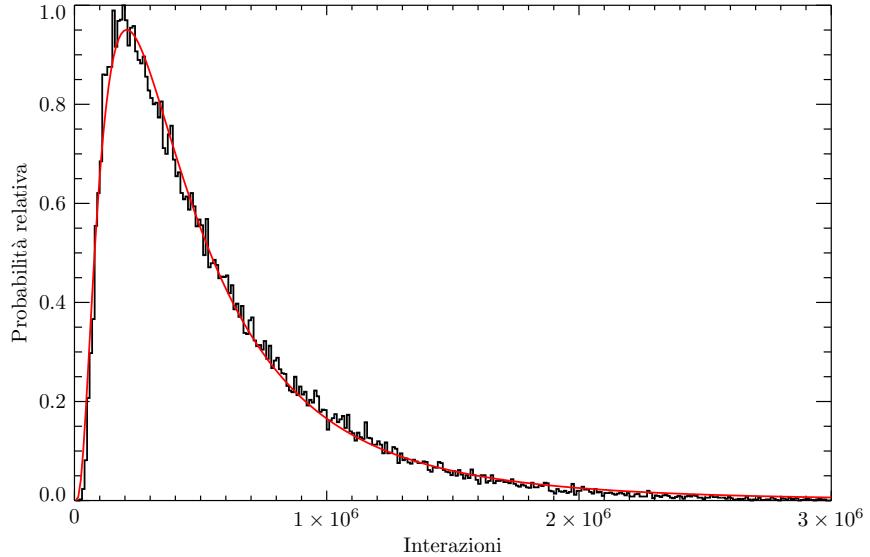


Figura 4.2: Numero di interazioni.

Riportiamo in tabella i risultati trovati:

| $L$<br>(m) | $T$<br>(cm) | $R$<br>( $\mu$ m) | $\langle N \rangle$ | $\langle W \rangle$<br>(m) | $N_{mediano}$ | $W_{mediano}$<br>(m) |
|------------|-------------|-------------------|---------------------|----------------------------|---------------|----------------------|
| 200        | 1           | 5                 | 553000              | 4.38                       | 419000        | 3.32                 |

Riportiamo i valori di  $N$  e  $W$  della stima eseguita in sezione 2.2 trattando l'approssimazione piana

| $L$<br>(m) | $T$<br>(cm) | $R$<br>( $\mu$ m) | $\langle N \rangle$ | $\langle W \rangle$<br>(m) |
|------------|-------------|-------------------|---------------------|----------------------------|
| 200        | 1           | 5                 | 562500              | 4.33                       |

I valori medi di  $N$  e  $W$  della simulazione sono in buon accordo con i valori medi di  $N$  e  $W$  della stima eseguita in approssimazione piana.

## 4.2 Seconda simulazione ( $L = 200$ m, $R = 100$ $\mu$ m, $T = 1$ cm)

In questa seconda simulazione (eseguita per 50000 volte) abbiamo posto  $L = 200$  m,  $R = 100$   $\mu$ m e  $T = 0.01$  m, quindi rispetto alla prima simulazione abbiamo aumentato la dimensione del raggio. Da quanto abbiamo detto in sezione 2.1, in particolare con l'eq. 2.11 e l'eq. 2.3, ingrandendo le gocce d'acqua ci aspettiamo che il numero di interazioni e il valore della colonna d'acqua siano molto più piccoli: infatti il numero di interazioni va come l'inverso del quadrato del raggio della goccia ( $N \propto R^{-2}$ ) e il valore della colonna d'acqua va come l'inverso del raggio ( $W \propto R^{-1}$ ).

Riportiamo in figura 4.3 l'istogramma con i valori di  $W$

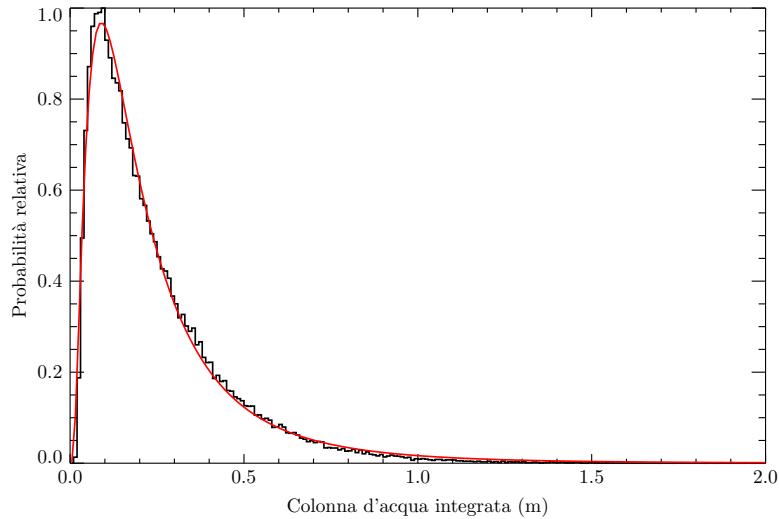


Figura 4.3: Colonna d'acqua integrata.

Anche in questo caso il numero di conteggi inizialmente presente sull'ordinata è stato sostituito con una distribuzione di probabilità normalizzata sul valore di conteggi maggiore (posto uguale a 1). Riportiamo i valori della colonna d'acqua ottenuti dalla simulazione:

$$W \text{ (valor medio)} = 0.24 \text{ m ,}$$

$$W \text{ (mediana)} = 0.18 \text{ m ,}$$

$$\sigma = 0.15 \text{ m .}$$

Il fit migliore per l'istogramma è dato anche in questa simulazione da una curva log-normale.

Presentiamo in figura 4.4 l'istogramma delle interazioni

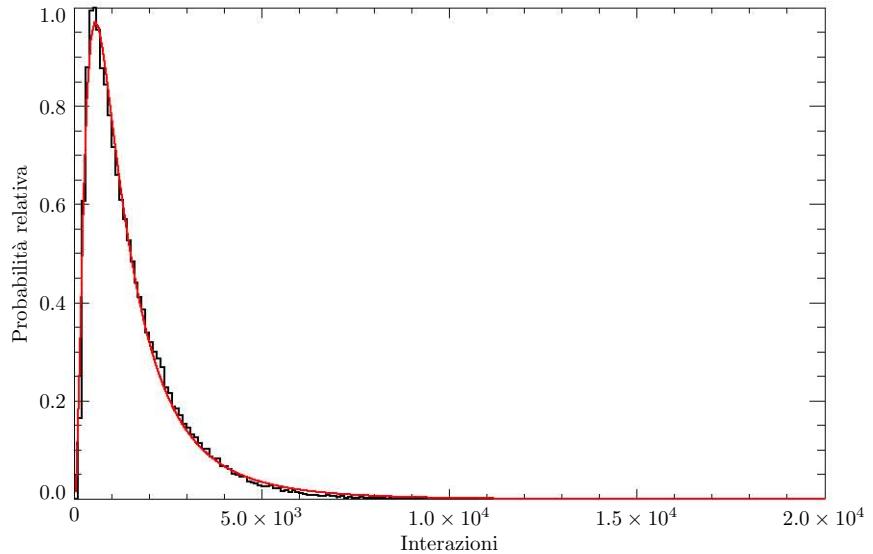


Figura 4.4: Numero di interazioni.

Riassumiamo nella seguente tabella i risultati trovati:

| $L$<br>(m) | $T$<br>(cm) | $R$<br>( $\mu$ m) | $\langle N \rangle$ | $\langle W \rangle$<br>(m) | $N_{mediano}$ | $W_{mediano}$<br>(m) |
|------------|-------------|-------------------|---------------------|----------------------------|---------------|----------------------|
| 200        | 1           | 100               | 1529.03             | 0.24                       | 1158.00       | 0.18                 |

Richiamiamo per un confronto i dati ottenuti dalla stima di *random walk* in approssimazione piana

| $L$<br>(m) | $T$<br>(cm) | $R$<br>( $\mu$ m) | $\langle N \rangle$ | $\langle W \rangle$<br>(m) |
|------------|-------------|-------------------|---------------------|----------------------------|
| 200        | 1           | 100               | 1406                | 0.16                       |

Anche in questo caso i valori medi di  $N$  e  $W$  della simulazione sono in buon accordo con i valori medi di  $N$  e  $W$  della stima eseguita in approssimazione piana.

### 4.3 Terza (e quarta) simulazione

In questa sezione discutiamo l'indipendenza del codice dalla lunghezza caratteristica della nube (parametro  $L$ ). Abbiamo infatti testato il codice eseguendolo per 150000 volte; in particolare nelle prime 50000 abbiamo tenuto la lunghezza caratteristica pari a  $L = 20$  m, nelle seconde 50000 abbiamo posto  $L$  pari a 200 m (come già fatto nella seconda simulazione di sezione 4.2) mentre nelle ultime 50000 volte abbiamo dato a  $L$  un valore pari a 2000 m. Il codice riporta gli stessi risultati nei tre casi, come ci attendavamo dal modello<sup>3</sup>.

### 4.4 Confronto con i dati di Lee

Attraverso la figura 4.5 possiamo ricavare una stima sulla temperatura di colore delle nostre simulazioni: nella prima simulazione, abbiamo trovato  $W = 4.38$  m, che corrisponde ad una temperatura di colore di circa 10000 K.

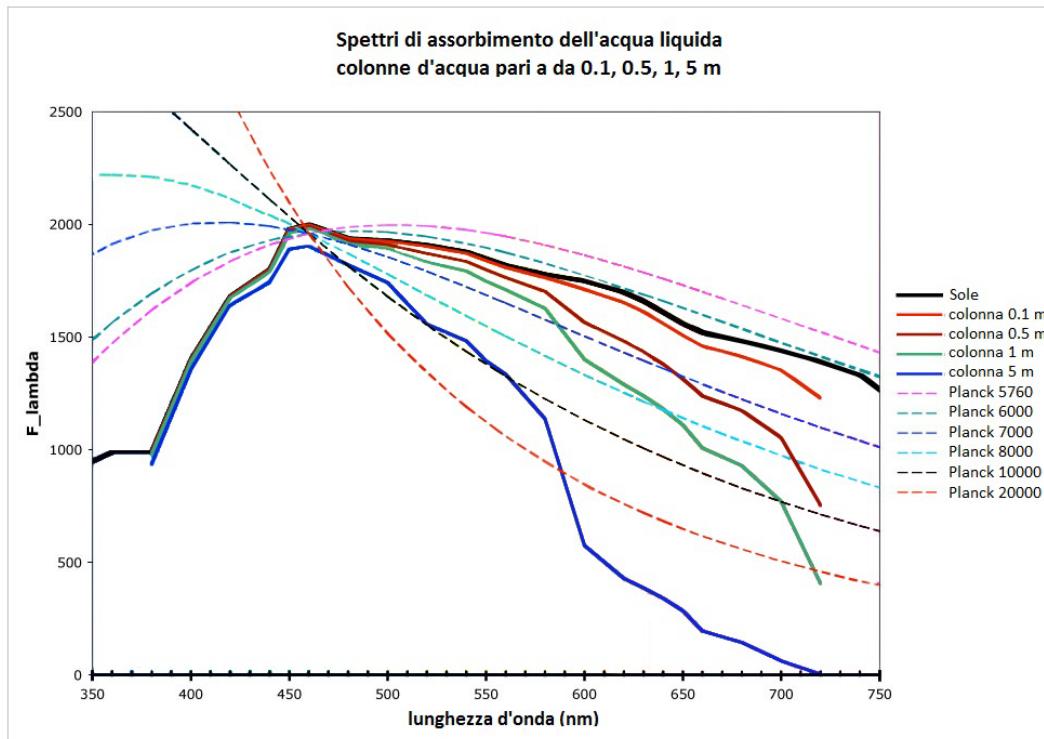


Figura 4.5: Spettri di assorbimento: in rosso lo spettro di assorbimento con una lunghezza di assorbimento  $l$  pari a 10 cm, in porpora uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 0.5 m, in celeste uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 1 m, infine in blu uno spettro di assorbimento con  $l$  pari a 5 m. In nero lo spettro del Sole senza assorbimento. Le linee tratteggiate rappresentano i fit dello spettro di Planck con differenti temperature di colore.

<sup>3</sup>Si confronti la sezione 2.1 nelle osservazioni finali.

Nell'articolo<sup>4</sup> “*Colors of the daytime overcast sky*” Lee trascrive i risultati della sua analisi eseguita su 4278 spettri di cielo nuvoloso; trascriviamo i suoi risultati in termini di temperatura di colore correlata (CCT)

| valore minimo<br>(K) | valore massimo<br>(K) | valore medio e mediana<br>(K) |
|----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| 5799                 | 9316                  | $\simeq 6500$                 |

Il confronto con i dati di Lee porta a un buon accordo; le nostre stime sono infatti superiori di un fattore pari a  $\simeq 1.53$  volte il suo valor medio. La ragione di questa sovrastima è da attribuire al fatto che all'interno di  $T$  abbiamo sia l'acqua liquida che il contenuto di vapore acqueo, mentre sappiamo che il vapore acqueo non influisce sull'assorbimento spettrale.

---

<sup>4</sup>Si confronti [10].

# Conclusioni e prospettive

Nello studio del colore del cielo nuvoloso abbiamo creato un modello capace di predire il valore della temperatura di colore in funzione di alcuni parametri rappresentativi della nube: il raggio delle gocce d'acqua e la colonna d'acqua contenute nella nube stessa. Il modello è in ottimo accordo con i dati ottenuti con le simulazioni del codice scritto in linguaggio C; nel confronto delle nostre stime con i dati presenti in letteratura si è ottenuto un buon accordo.

Il modello può essere migliorato apportando alcune modifiche. Le più importanti sono: modifica degli indici di rifrazione in funzione di lunghezza d'onda, temperatura e pressione, introduzione di una dimensione delle gocce d'acqua variabile all'interno della stessa nube (questo può aiutare a descrivere soprattutto le nubi più estese in altezza).

Il passo successivo consisterà nell'eseguire misure dirette di cieli nuvolosi. Nella preparazione al lavoro di tesi sono state individuate delle tecniche di calibrazione colorimetrica utilizzando un confronto tra spettri stellari e misure della macchina per compiere le osservazioni attraverso una macchina fotografica digitale.

# Appendice A

## Le nubi

Una nuvola è un insieme di gocce d'acqua o di cristalli di ghiaccio sufficientemente densi da diventare visibili. La formazione di queste gocce o cristalli in genere richiede la presenza di piccoli nuclei di pulviscolo nell'atmosfera che facciano da siti di aggregazione per la condensazione o la deposizione di ghiaccio. Le nuvole di solito si formano quando l'aria umida si raffredda fino a un punto di saturazione. Poiché generalmente la temperatura diminuisce con l'altitudine, le nuvole che si formano negli strati superiori della troposfera tendono ad essere costituite prevalentemente da cristalli di ghiaccio, mentre le nuvole che si formano negli strati inferiori della troposfera<sup>1</sup> sono tipicamente composte da gocce d'acqua. Il movimento verso l'alto di aria che porta alla formazione di una nuvola può essere associato o alla convezione, o alla risalita meccanica o alla risalita dinamica. La convezione avviene quando l'aria calda diventa più leggera di quella circostante e quindi si muove verso l'alto. La risalita meccanica (o orografica) si verifica quando l'aria si muove su delle barriere fisiche, come ad esempio delle montagne. La risalita dinamica è associata a dei movimenti di aria su larga scala all'interno di sistemi di bassa pressione di superficie o lungo i fronti dove la densità dell'aria è disomogenea.

### A.1 Formazione delle nuvole

Le nuvole si formano quando l'aria al di sopra delle zone più calde del terreno sale attraverso il livello di condensazione, diventa satura e condensa formando gocce d'acqua. La massa d'aria calda continuerà a salire fino a quando la sua temperatura sarà più alta di quella dell'aria circostante. Se man mano che l'aria sale la condizione persiste, si parla di condizioni instabili. Ma se la massa d'aria raggiunge velocemente la temperatura dell'aria circostante, si parla di condizioni stabili. Una massa d'aria in risalita si raffredda a un tasso di  $9,8^{\circ}\text{C}$  per  $km$ . Quindi conoscendo la temperatura dell'aria in risalita a livello del suolo, e la temperatura dell'aria alle diverse altezze della troposfera, è possibile stimare la dimensione caratteristica del moto delle particelle.

---

<sup>1</sup>La troposfera è la parte di atmosfera che sta tra i 1000 e i 12000 metri. Si confronti la figura A.1.

## A.2 Atmosfera

L'atmosfera è divisa in 6 zone principali: la troposfera, la stratosfera, la mesosfera, la termosfera, la ionosfera e la esosfera. È nella troposfera che si verificano quasi tutti i fenomeni meteorologici, e su cui quindi soffermeremo l'attenzione: essa contiene l'80 % della massa gassosa totale e il 99 % del vapore acqueo: l'aria della troposfera è riscaldata dalla superficie terrestre ed ha una temperatura media globale di 15° C al livello del mare, che diminuisce con l'altitudine (con una media di 0,65° C ogni 100 m di quota) fino ai circa -60° C della tropopausa. L'aria degli strati più bassi, che tende a salire, genera grandi correnti convettive da cui hanno origine venti equatoriali costanti (gli alisei) e le perturbazioni atmosferiche. La troposfera ha uno spessore variabile a seconda della latitudine: ai poli è spessa solamente 8 km mentre raggiunge i 17 km all'equatore. La pressione atmosferica decresce con l'altitudine secondo una legge in prima approssimazione esponenziale. Riportiamo in figura la classificazione delle diverse zone dell'atmosfera

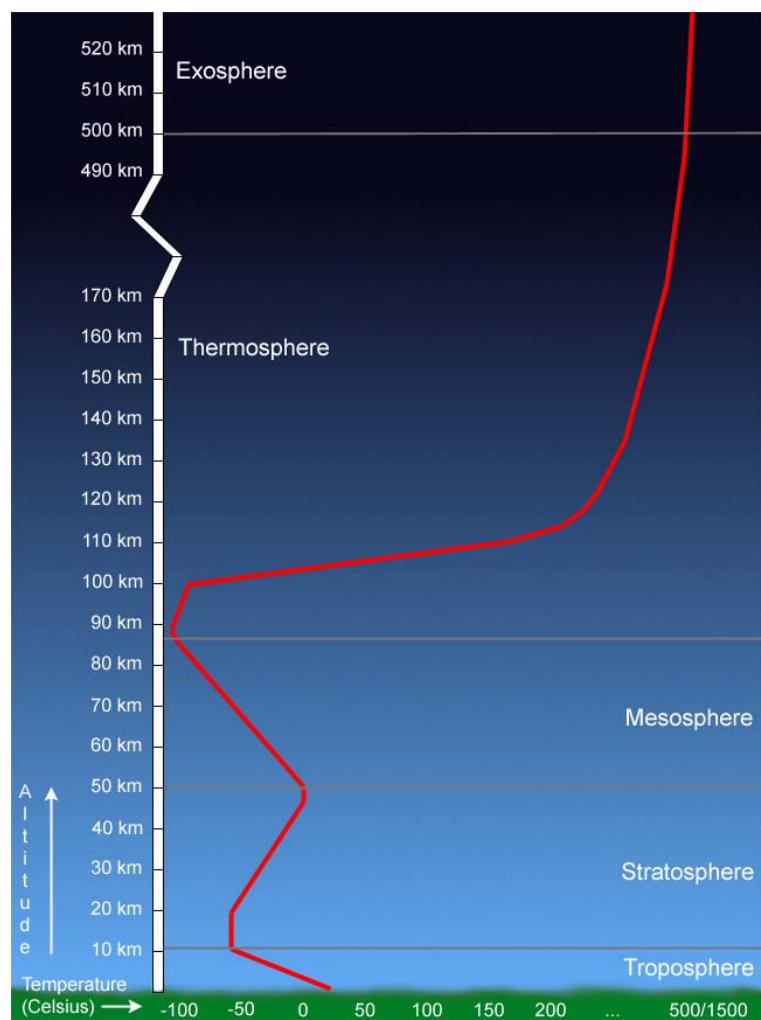


Figura A.1: Atmosfera terrestre.

### A.3 Classificazione delle nubi

Le nubi sono state classificate e ordinate in dieci generi:

- 1. Cirro: nube del livello superiore della troposfera (altitudine 8000 – 12000 m) che si presenta sotto forma di filamenti bianchi, isolati e sottili, formati da cristalli di ghiaccio. I cirri sono trasparenti a causa della grande dispersione di questi cristalli; pertanto la luce del Sole attraversa i cirri senza quasi alcuna attenuazione.
- 2. Cirrocumulo: nube piccola, simile all'altocumulo ma di dimensioni inferiori e senza ombra propria, la cui forma ricorda una pecorella. Queste nubi sono principalmente costituite da cristalli di ghiaccio, ma possono anche contenere acqua se le temperature sono abbastanza elevate; sono inoltre poco spesse. I cirrocumuli fanno parte delle nubi alte (6 – 7000 m d'altezza) e di solito compaiono in banchi.
- 3. Cirrostrato: nube della stessa natura del cirro ma formata da un velo continuo traslucido che copre totalmente o parzialmente il cielo. Il suo spessore è molto limitato e il suo colore è normalmente biancastro lattiginoso, lasciando talvolta intravedere una trama fibrosa. Il cirrostrato è formato da cristalli di ghiaccio compresi tra i 6.000 e i 12.000 metri di altitudine, ed è spesso accompagnato da altre nubi stratiformi quali gli altostrati a medie altitudini, ed i nembostrati e gli strati a basse altitudini. Nessun tipo di precipitazione è associato a questa conformazione nuvolosa.
- 4. Altocumulo: nube media che si presenta sotto forma di fiocchi globulari compatti che si estendono su vaste estensioni planari situate ad una altitudine che può variare tra i 3000 ed i 6000 metri. L'altocumulo è composto da piccole gocce d'acqua o da cristalli di ghiaccio, formati da un'ascensione di una consistente massa calda e umida, il cui vapore si condensa in un'atmosfera instabile, a circa  $-25^{\circ}\text{C}$ . La presenza di altocumuli può indicare l'approssimarsi di un fronte e di un cambiamento del tempo, anticipando l'arrivo di temporali. Gli altocumuli possono provocare delle concrezioni di ghiaccio sulle superfici degli aeroplani.

Da adesso nella classificazione si presentano nubi che possono dare origine a pioggia:

- 5. Altostrato: nube media (3 – 4000 m d'altezza), di colore bianco opaco o traslucido, talvolta tendente all'azzurrognolo. Queste nubi possono essere anche molto spesse, arrivando ad uno sviluppo verticale di 5000 m. Essa si forma quando una massa di aria calda ai livelli medi dell'atmosfera si scontra con una massa di aria fredda, molto spesso è un precursore di un fronte caldo in avvicinamento, ed indica che la parte centrale della perturbazione è molto vicina. L'altostrato tende a coprire uniformemente la volta celeste e può dare origine a pioviggine, o anche trasformarsi in nembostrato e dare origine a pioggia o a neve se le condizioni lo permettono. Occasionalmente l'altostrato è messaggero di temporali in avvicinamento.
- 6. Stratocumulo: nube bassa e scura, simile ad uno strato, ma caratterizzata da irregolarità nello spessore. Si presenta come un ammasso tondeggiante, di colore grigio nella parte inferiore. Essa è un'altra nube da fronte caldo che precede le schiarite del settore caldo. Nonostante il loro inquietante aspetto, producono solo pioggia leggera.

- 7. Strato: nube molto bassa e uniforme a sviluppo orizzontale, di colore variabile dal grigio scuro al quasi bianco. Per “giornata nuvolosa” generalmente si intende un cielo pieno di nuvole stratiformi che oscurano il Sole. Quando questo tipo di nube riesce a raggiungere il suolo, dà origine alla formazione della nebbia. La nebbia è presente soprattutto d'inverno e lungo le coste. Lo strato è una nube da fronte caldo e può dare origine a piogge deboli o piovigginì.
- 8. Nembostrato: è una nube a grande sviluppo orizzontale, di colore grigiastro-nero: la classica nube da maltempo. È simile allo strato ma è più spessa e origina precipitazioni e venti più forti. Segnala l'arrivo del fronte caldo e di precipitazioni persistenti, che possono anche durare per più giorni, prima dell'arrivo delle schiarite.



Figura A.2: Un nembostrato.

- 9. Cumulo: è una nube a piccolo o medio sviluppo verticale, che si presenta come una piccola torre o cavolfiore, essa ha base piatta o convessa a seconda dello sviluppo verticale. I cumuli si formano a causa delle correnti convettive create dalla radiazione solare e in genere sono indice, se poco sviluppate, di bel tempo stabile. Alcune volte, però, queste nubi si sviluppano molto in verticale formando i cumuli congesti che possono provocare rovesci anche forti e che sono lo stadio del cumulo prima della trasformazione a cumulonembo. Se le correnti ascensionali sono molto intense, alla sommità del cumulo congesto si può scorgere un piccolo cappuccio, denominato pileus, indicatore di estrema instabilità atmosferica e precursore di intensi temporali. (si osservano soprattutto in estate)

- 10. Cumulonembo: nube a sviluppo verticale che si sviluppa in condizioni di instabilità atmosferica; è la più spettacolare e imponente tra le nubi. Vista a distanza si presenta grosso modo come una torre che dalla base piatta e relativamente non molto alta dal suolo (mediamente intorno ai 2000 metri alle nostre latitudini) si erge per alcuni chilometri, sino ad arrivare al limite della troposfera, ovvero, alle nostre latitudini, intorno ai 12000 m (meno ai poli e di più all'equatore). Raggiunto tale limite si espande orizzontalmente e non più verticalmente, dando luogo ad una sommità a forma di incudine in quanto a partire da quella quota l'aria comincia a diventare più calda a mano a mano che si sale e, quindi, il vapore acqueo in essa presente non riesce più a condensarsi. Il cumulonembo è la nube tipica di temporali anche violenti e si presenta prevalentemente nelle ore più calde dei mesi estivi, in quanto la sua formazione necessita di una grande quantità di energia termica.



Figura A.3: Un cumulonembo.

# Appendice B

## Programma

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <vector>
#include <math.h>

using namespace std;

vector<double> lettura(string name) // funzione di lettura file
{vector<double> vett;
 fstream ingresso;
 double var;
 ingresso.open(name.c_str(), fstream::in);
 ingresso >> var;
 while (!ingresso.eof()) {vett.push_back(var);
    ingresso >> var;}
 ingresso.close();
 return vett; }

double myrandom() /* funzione per la creazione di variabile
                      stocastica tra 0 e 1 */
{double decim, a=(double)(RAND_MAX)+1, num=0. ;
 for(int i=0;i<4;i++)
 {decim = rand()/a;
  a*=(double)(RAND_MAX)+1;
  num=num+decim;}
 return num; }

int main(){ // INIZIO main
 string name;
 vector<double> abs;
 // limite al numero di iterazioni eseguite nel ciclo "while L"
 const double too_much=1e+012;
 // numero di esecuzioni del ciclo "PROG"
 const long N=1000;
 // L=dimensione caratteristica della nube (metri)
 const double L=200. ;
 // raggio tipico della goccia (metri)
 const double R=5e-006;
 // potenze di R
```

```

const double R2=pow(R,2.0),R3=pow(R,3.0);
// acqua totale precipitata (metri)
const double T=0.01;
// B=lambda max.(Angstrom), passo=passo del file "assorb_passo_50"
const double B=7000.,passo=50. ;
// temperatura superficiale del Sole
const double temp=5777;
// indici di rifrazione
const double n_a=1.0002926,n_w=1.334;
// potenze e rapporti con gli indici di rifrazione
const double n2_a=pow(n_a,2.0),n2_w=pow(n_w,2.0),n_aw=n_a/n_w;
// permeabilità magnetica dell'aria e dell'acqua
const double mu_a=1.0000004,mu_w=0.99999;
// rapporti tra le permeabilità magnetiche
const double mu_aw=mu_a/mu_w,mu_wa=mu_w/mu_a;
int j=0, get; // j=indice della lambda considerata
long count=0; // count=giri eseguiti in "while L"
long times=0; // conteggio per riflessioni interne
long cost=0; // cost=valore del ciclo "PROG"
double ko=0.; // superate "too_much" interazioni
double ok=0.; // non superate "too_much" interazioni
double conteggi,f_i,f_int;
double n=T/((4/3.)*M_PI*R3*L); // densità gocce d'acqua
// thetay = angolo rispetto all'asse delle y
double thetay,theta1,theta2,theta,a,a2,b;
// r=distanza percorsa fra due interazioni vicine
double r,rand,rand2,rand3,i;
double x,z,x_rot,z_rot,phi; // coord. cartesiane dell'angolo thetay
double y; // distanza percorsa sull'asse delle y (metri)
double dy; // incremento fra due interazioni vicine
double h=6.626e-034,C=299792458,C2=pow(C,2.0),k=1.38e-023;
double int_rad; // int_rad=intensità di radiazione
// int_rad_assorb=intensità di radiazione con assorbimento
double int_rad_assorb;
double lambda; // lambda=lungh.d'onda (tra 4e-007 e 7e-007)
double lambda5; // pow(lambda,5.0)
// lunghezza totale assorbimento lungo un ciclo (metri)
double l_assorb = 0. ;
// dl_assorb=assorbimento per ogni singola interazione (metri)
double dl_assorb;
double l_assorb_tot=0.; // assorbimento di tutti i cicli (metri)
double l_assorb_medio; // media degli assorbimenti
double E0_ort,E0_par; // componenti del campo riflesso

srand(time(NULL)); // inizializzazione del "random seed"

while (cost < N)
{ // INIZIO ciclo "PROG"
    y = 0. ;
    thetay = M_PI/4.; // angolo iniziale fotone
    r = -log(myrandom())/(M_PI*R2*n);
    dy = r*cos(thetay);
    y += dy;
    while((y > 0) && (y < L)) { // INIZIO "while L"
        rand = myrandom();
        theta1 = asin(sqrt(rand));

```

```

a = sin(theta1);
b = cos(theta1);
a2 = pow(a,2.0);
// INIZIO calcolo f_i (superficie esterna goccia)
rand2 = 2*M_PI*myrandom();
E0_ort = ((n_a*b-mu_aw*sqrt(n2_w-n2_a*a2))/(
(n_a*b+mu_aw*sqrt(n2_w-n2_a*a2)))*sin(rand2);
E0_par = ((mu_aw*n2_w*b-n_a*sqrt(n2_w-n2_a*a2))/(
(mu_aw*n2_w*b+n_a*sqrt(n2_w-n2_a*a2)))*cos(rand2);
f_i = E0_ort*E0_ort + E0_par*E0_par; // prob. riflessione
// FINE calcolo f_i (superficie esterna goccia)
theta2 = asin((n_aw)*sqrt(rand));
if(myrandom() <= f_i){ // RIFLESSIONE (f_i)
theta = M_PI-2*theta1;
phi = 2*M_PI*myrandom();
}
else
{ // INIZIO rifrazione (1 - f_i)
f_int = 0.;
rand3 = 2*M_PI*myrandom();
a = sin(theta2);
b = cos(theta2);
while(f_int >= 1.){
// INIZIO calcolo f_int (superficie interna goccia)
E0_ort = ((n_w*b-mu_wa*sqrt(n2_a-n2_w*a2))/(
(n_w*b+mu_wa*sqrt(n2_a-n2_w*a2)))*sin(rand3);
E0_par = ((mu_wa*n2_a*b-n_w*sqrt(n2_a-n2_w*a2))/(
(mu_wa*n2_a*b+n_w*sqrt(n2_a-n2_w*a2)))*cos(rand3);
f_int = E0_ort*E0_ort + E0_par*E0_par; // prob. riflessione
if(f_int>1.) {cout << "errore nel calcolo di f_i" << endl;
cin >> get;}
// FINE calcolo f_int (superficie interna goccia)
}
times = 0; // azzerà times per successive rifr e rifl.int
while(myrandom() <= f_int) times++; // riflessioni interne
theta = 2*(theta1-theta2) + times*(M_PI-2*theta2);
phi = 2*M_PI*myrandom();
dl_assorb = 2*R*cos(theta2);
l_assorb = l_assorb + (times+1)*dl_assorb;
} // FINE rifrazione (1 - f_i)
x = sin(theta)*cos(phi);
z = cos(theta);
z_rot = x*sin(theta)+z*cos(theta);
thetay = acos(z_rot);
dy = r*cos(theta);
y = y + dy;
r = -log(myrandom())/(M_PI*R2*n);
count++;
if(count > too_much) // evita troppi calcoli
{cout << "Dopo" << too_much << " interazioni il fotone "
"NON ue' ancora uscito dalla nube" << endl;
ko++;
break;}
} // FINE "while L"
if (y <= 0) continue;
cost++;

```

```

cout << "Esecuzione" << cost << "di" << N << ":" << endl;
if(count < too_much)
    {conteggi = conteggi + count;
    l_assorb_tot = l_assorb_tot + l_assorb;
    ok++;}
count=0; /*azzerà il conteggio per contare il numero di interazioni del fotone con lunghezza d'onda successiva*/
l_assorb = 0.;
} // FINE ciclo "PROG"
l_assorb_medio = l_assorb_tot/ok;
if(ok != 0.) cout<<"RISULTATI:"<<endl<<"assorbimento_medio:"<<
    l_assorb_medio << "metri." << endl;
else cout << "Non è possibile calcolare
uuuuuuuuuuuuuuuuuuuuu l'assorbimento_medio." << endl;
// INIZIO assorbimento varie frequenze
abs = lettura("assorb_passo50.txt");
fstream scrittura;
scrittura.open("spettri_assorbimento.txt",fstream::out);
for(i=4000.,j=0;i<=B;i=i+passo,j++) // i è la lambda in Angstrom
{ // INIZIO assorbimento singola frequenza
lambda = i*1e-010; // lunghezza d'onda - metri
lambda5 = pow(lambda,5.0);
// conversione di l_assorb_medio da metri a centimetri!
l_assorb_medio = l_assorb_medio*100.;
int_rad = (2.*h*C2/(lambda5))*(pow(exp((h*C)/
    (lambda*k*temp))-1.,-1.)); // spettro senza assorbimento
// spettro con assorbimento
int_rad_assorb = int_rad*exp(-abs[j]*l_assorb_medio);
scrittura << lambda << " " << int_rad
    << " " << int_rad_assorb << endl;
} // FINE calcolo assorbimento singola frequenza
scrittura.close(); // chiudo il file "spettri_assorbimento.txt"
// FINE assorbimento varie frequenze
if(ok==0.) cout<<"Non è possibile eseguire la media dei
uuuuuuuuuuuuuuuuuuuuu conteggi perche' nessun fotone è uscito
uuuuuuuuuuuuuuuuuuuuu dalla nube."<<endl;
else{conteggi = conteggi/ok;
cout << "media dei conteggi:" << conteggi << endl;
}
cout << "(Il fotone è uscito" << ok << " volte su" <<
ok + ko << ")." << endl;
cin >> get;
return 0;
} // FINE main()

```

# Bibliografia

- [1] C.F.Bohren, Fundamentals of Atmospheric Radiation: an Introduction with 400 Problems, Wiley-VCH (2006).
- [2] C.F.Bohren, A.B.Fraser, Green thunderstorms, Bull. Am. Meteorol. Soc. **74**, 2185-2193 (1993).
- [3] C.L.Braun, S.N.Smirnov, Why is water blue?, J.Chem.Edu, **70**, 612 (1993).
- [4] B.W.Carroll, D.A.Ostlie, An introduction to Modern Astrophysics, Pearson International Edition (2007).
- [5] M.Chaplin, Water absorption spectrum. (2009).
- [6] R.G.Fleagle, J.A.Businger, An introduction of Atmospheric Physics, second edition (1980).
- [7] J.Hernández-Andrés et al., Color and spectral analysis of daylight in southern Europe, Journal of the Optical Society of America, **18**, 6 (2001).
- [8] The International Association for the Properties of Water and Steam, Release on the Refractive Index of Ordinary Water Substance as a Function of Wavelength, Temperature and Pressure, Erlangen, Germania (1997).
- [9] J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, second edition, Zanichelli, Bologna (2001).
- [10] R.L. Lee, Jr. and J.Hernández-Andrés, Colors of the daytime overcast sky, Journal of the Optical Society of America (2005).
- [11] D.K.Lynch, W.Livingston, Color and light in nature, Cambridge University Press, seconda edizione, ISBN 0 521 77504 3 (2001).
- [12] S.G.Lipson and H.Lipson, Optical Physics, Cambridge University Press, Cambridge (1969).
- [13] W.E.Middleton, The color of the overcast sky, Journal of the Optical Society of America, **44**, 10 (1954).
- [14] N.L.Miles et al., Cloud Droplet Size Distributions in Low-Level Stratiform Clouds, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 57, Issue 2 (January 2000).
- [15] D.J.Segelstein, The complex refractive index of water, University of Missouri-Kansas City (1981).